1. Sea Ω un conjunto cualquiera y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de Ω. Probar que existe una única menor σ-álgebra $\mathcal{U}$ de conjuntos de Ω que contiene a $\mathcal{A}$. A $\mathcal{U}$ se la denomina σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

2. Sea $X = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_i son todos distintos, los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Sea $\mathcal{U}(X)$ la σ-álgebra generada por X.

   a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\mathcal{U}(X)$.

   b) Probar que si la v.a. Y es $\mathcal{U}(X)$-medible entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_i.

   c) Mostrar que entonces Y puede ser escrita como una función de X.

3. Verificar que
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \sigma > 0$$
es una función de densidad y que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$.

4. *a*) Probar que si A y B son eventos independientes en un espacio de probabilidad, entonces también lo son A^c y B. Idem para A^c y B^c.

   b) Sea $A_1, \ldots, A_n$ una partición de un espacio muestral Ω con $P(A_i) > 0$. Probar que si B es un evento con probabilidad positiva entonces vale la fórmula de Bayes
$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

5. Sea $X \sim N(0,1)$ y consideremos la variable aleatoria $Y = X^2$. Hallar la función de densidad de Y.

6. Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{U}$ la $\sigma-$álgebra de Borel y P la medida de Lebesgue. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Definimos en Ω las siguientes variables aleatorias
$$X_1(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1), \qquad X_2(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_2).$$
Probar que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas.

7. *a*) Sea $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ un espacio de probabilidad y $A_1 \subset A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ eventos. Probar que
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} P(A_k).$$
Sugerencia: Considerar los eventos $B_n = A_{n+1} - A_n$.

b) Probar que si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$, entonces

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} P(A_k).$$

8. *a*) Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y una función medible $X : \Omega \to \mathbb{R}$, considerar la medida μ_X en los boreleanos de $\mathbb{R}$, dada por

$$\mu_X(A) := \mu(X^{-1}(A)) \ .$$

Probar que para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ_X integrable, vale que

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\mu_X \ = \ \int_{\Omega} f(X)\, d\mu \ .$$

b) Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ medible con $\int_\Omega f\, dP = 1$, considere la medida ν definida sobre $(\Omega, \mathcal{U})$ dada por

$$\nu(A) = \int_A f\, dP \ .$$

Pruebe que $(\Omega, \mathcal{U}, \nu)$ es un espacio de probabilidad y que para toda $g : \Omega \to \mathbb{R}$ νintegrable, vale que

$$\int_\Omega g\, d\nu = \int_\Omega g\ f\ dP \ .$$

c) En particular, sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una v.a. y supongamos que μ_X tiene función de densidad f. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y supongamos que

$$Y = g(X)$$

es integrable. Entonces

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx,$$

una integral sobre $\mathbb{R}^n$ que se puede "calcular".

9. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Se definen los *polinomios de Bernstein*

$$b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Probar que $b_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$. Sugerencia

a) Dado $x \in [0,1]$, tomar una sucesión de variables aleatorias independientes X_k tal que $P(X_k = 1) = x$, $P(X_k = 0) = 1 - x$. Entonces $b_n(x) = E(f(\overline{X}_n))$, donde $\overline{X}_n = \sum_{k=1}^{n} X_k / n$.

b) Usar la desigualdad de Chebychev para probar que

$$P(|\overline{X}_n - x| > \delta) \leq \frac{C}{n\delta^2},$$

y que la constante C pude ser elegida independiente de x.

c) $|b_n(x) - f(x)| \leq E(|f(\overline{X}_n) - f(x)|) = \ldots$

10. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de densidad f_X y f_Y respectivamente. Probar que la función de densidad de $Z = X + Y$ es

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy.$$

11. Sean X e Y variables aleatorias independientes con función de denidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Hallar la densidad de $X + Y$.

12. Probar que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = f(\frac{1}{2}).$$

13. Probar que

a) $E(E(X|\mathcal{V})) = E(X)$.

b) $E(X) = E(X|\mathcal{W})$ si $\mathcal{W}$ es la $\sigma-$álgebra trivial, $\mathcal{W} = \{\emptyset, \Omega\}$.

14. Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)$. Probar que

$$E(X|Y) = \Phi(Y), \qquad \text{con} \qquad \Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\, dx.$$

Sugerencia:

a) $\Phi(Y)$ es $\mathcal{U}(Y)$-medible.

b) Si $A \in \mathcal{U}(Y)$, $A = Y^{-1}(B)$ para algún conjunto de Borel de $\mathbb{R}$. Entonces

$$\int_A X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B x f_{XY}(x,y)\, dy dx.$$

c)

$$\int_A \Phi(Y)\, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B \Phi(y) f_{XY}(x,y)\, dy dx.$$

d)

$$\int_A X dP = \int_A \Phi(Y)\, dP \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{U}(Y).$$

15. Se dice que una función suave $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *convexa* si $\Phi''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Probar que si Φ es convexa, entonces

$$\Phi(y) \geq \Phi(x) + \Phi'(x)(y-x), \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Probar que si Φ es convexa, entonces

$$\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(y), \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

c) Una función suave $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice convexa is la matriz $(\Phi_{x_i x_j})_{i,j}$ es semidefinida positiva para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ($\sum_{i,j=1}^n \Phi_{x_i x_j} \xi_i \xi_j \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Probar

$$\Phi(y) \geq \Phi(x) + \nabla\Phi(x) \cdot (y-x) \quad \text{y} \quad \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

16. *a*) Probar la *Desigualdad de Jensen:*

$$\Phi(E(X)) \leq E(\Phi(X)),$$

para cualquier variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ y cualquier función convexa Φ.

b) Probar la *Desigualdad de Jensen condicional:*

$$\Phi(E(X|\mathcal{V})) \leq E(\Phi(X)|\mathcal{V}),$$

para cualquier variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ y cualquier función convexa Φ.