Seminario de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Práctica 3 — Integración Estocástica

1. Sea $\mathcal{F}(t) = \mathcal{U}(W(s), s \leq t)$. Determinar cuales de los siguiente procesos son $\mathcal{F}(t)$ adaptados.

   a) $X(t) = W(\frac{t}{2})$

   b) $X(t) = W(2t)$

   c) $X(t) = 2W(t)$

   d) $X(t) = W(t)W(\frac{t}{2})$

   e) $X(t) = W(t)W(2t)$.

2. Sea $X(\cdot)$ un proceso $(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$ adaptado con trayectorias continuas. Probar que $X(\cdot)$ es progresivamente medible. Sugerencia: Aproximar a $X(\cdot)$ por procesos simples. Observar que el mismo resultado vale para procesos con trayectorias solo continuas a derecha (izquierda).

3. Sea $g \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ con $g(0) = g(1) = 0$, entonces
$$\int_0^1 g\, dW = -\int_0^1 g' W\, dt.$$

4. Probar que
$$\int_0^t W^2\, dW = \frac{1}{3}W(t)^3 - \int_0^t W(s)\, ds.$$

5. Sea $P^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = T\}$ una partición de $[0,T]$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ fijo. Definimos las sumas de Riemann
$$R_n^\lambda := \sum_{j=0}^{k_n} W(\tau_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)), \qquad \tau_j^n := (1-\lambda)t_j^n + (1-\lambda)t_{j+1}^n.$$
   Entonces
$$\lim_{n\to\infty} R_n^\lambda = \frac{W(T)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T, \quad \text{en } L^2(\Omega).$$
   En particular, si permitimos elegir arbitrariamente τ_j^n, R_n no tiene límite.

6. Probar que si $G, H \in \mathbb{L}^2(0,T)$ (integrables hasta T), entonces
$$E\left(\int_0^T G\, dW \int_0^T H\, dW\right) = E\left(\int_0^T GH\, dt\right).$$

7. Usar la regla de la cadena de Itô para probar que $Y(t) := e^{\frac{t}{2}}\cos(W(t))$ es una martingala.

8. Sea $W(\cdot)$ un proceso de Wiener. Calcular $d(W^m)$, $m \geq 1$.

9. Encontrar un proceso $A(\cdot)$ para que

$$cos(t)W^5(t) + A(t)$$

sea una Martingala.

10. Usando la fórmula de Itô obtener una EDO para $g(t) = E(e^W(t))$ y calcularla.

11. Sea $W(\cdot) = (W^1, \ldots, W^n)$ un movimiento Browniano $n-$dimensional, y sea $Y(t) := |W(t)|^2 - nt$ para tiempos $t \geq 0$. Mostrar que $Y(\cdot)$ es una martingala.

12. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que

$$E\left(e^{\int_0^T g\,dW}\right) = e^{\frac{1}{2}\int_0^T g^2\,ds}.$$