Teoría de álgebras

Segundo Cuatrimestre 2004

Lista de ejercicios N$^{\mathrm{O}}$ 1. 1/9/04.

Generalidades

Notaciones generales: $\mathbb{K}$ es un cuerpo, $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}$.

(1) Sea A una $\mathbb{K}$-álgebra y M un A-módulo.
  (a) Supongamos que A es *aumentada*, es decir que hay un morfismo de álgebras $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$. Probar que $M \oplus A$ con el producto dado por $(m, a) \cdot (n, b) = (\varepsilon(b)m + an, ab)$ es una $\mathbb{K}$-álgebra.
  (b) Ahora M es un A-bimódulo. Probar que $M \oplus A$ con el producto dado por $(m, a) \cdot (n, b) = (mb + an, ab)$ es una $\mathbb{K}$-álgebra.

(2) Si A y B son $\mathbb{K}$-álgebras y M es un (A, B)-bimódulo,
  (a) probar que
$$C = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a \in A,\ m \in M,\ b \in B \right\}$$
  con la multiplicación y suma naturales, es una $\mathbb{K}$-álgebra.
  (b) Explicar los items del ejercicio 1 dentro del contexto más general de (2a).
  (c) Notar que M se incluye en C como un ideal nilpotente de paso 2, i.e. $mn = 0\ \forall m, n \in M$. Calcular el cociente C/M.
  (d) (El trencito) Sean $A_0, \ldots, A_n$ álgebras sobre $\mathbb{K}$, y para $i = 1, \ldots, n$, M_i un (A_{i-1}, A_i)-bimódulo. Encontrar una $\mathbb{K}$-álgebra que contenga a los M_i como ideales nilpotentes (de paso 2) y ortogonales, y cuyo cociente por el ideal generado por los M_i sea $A_0 \times \ldots \times A_n$.
  (e) Dadas las $\mathbb{K}$-álgebras A_0, A_1, A_2, encontrar condiciones sobre los espacios vectoriales M_1, M_2, N para que se pueda hablar de una estructura "natural" de álgebra sobre el espacio $\begin{pmatrix} A_0 & M_1 & N \\ 0 & A_1 & M_2 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

(3) Probar que si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, no existen $\mathbb{K}$-álgebras de división y de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ (a excepción, claro, de $\mathbb{K}$).

(4) Sin usar el ejercicio anterior, probar que si M es un A-módulo irreducible de dimensión finita y $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, entonces $\mathrm{End}_A(M) \simeq \mathbb{K}$.

(5) Recordar la $\mathbb{R}$-álgebra de cuaterniones, con base $1, i, j, k$ y producto definido por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. Observar/recordar que es un álgebra de división. ¿Por qué no es un álgebra sobre $\mathbb{C}$?

(6) Probar que si A es una $\mathbb{K}$-álgebra de dimensión finita, tiene una representación fiel de dimensión finita. Deducir que un elemento de A es inversible a izquierda si y solo si es inversible a derecha.

(7) Sea M un A-módulo de dimensión finita. Probar que M es indescomponible (= inescindible) si y sólo si $\mathrm{End}_A(M)$ es una $\mathbb{K}$-álgebra local (es decir, tiene un único ideal maximal).

(8) Sea W el álgebra de Weyl, con generadores x, ∂ y la relación $\partial x - x\partial = 1$. Probar que si $\operatorname{car}\mathbb{K} = 0$, la única representación de W de dimensión finita es la trivial. Encontrar una representación no trivial de dimensión finita en el caso $\operatorname{car}\mathbb{K} = p$.

(9) Encontrar un contraejemplo para la recíproca del lema de Schur. Es decir, encontrar un álgebra A y un A-módulo reducible M tal que $\mathrm{End}_A(M)$ sea un anillo de división. Sugerencia, considerar $\mathbb{K}(\bullet \to \bullet)$.

(10) Sea $\mathbb{S}_3$ el grupo simétrico en tres elementos, $\{1, 2, 3\}$. Probar que los siguientes son $\mathbb{K}\mathbb{S}_3$-módulos irreducibles ($\operatorname{car}\mathbb{K} = 0$):
  (a) La representación trivial, $M_0 = \mathbb{K}$, $gx = x\ \forall g \in \mathbb{S}_3$, $x \in M_0$.
  (b) La representación signo, $M_1 = \mathbb{K}$, $gx = \mathrm{sgn}(g)x$.
  (c) $M_2 = \mathbb{K}^2$, $(1, 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(2, 3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Probar que $\mathbb{K}\mathbb{S}_3$, visto como módulo a izquierda sobre sí mismo, es isomorfo a $M_0 \oplus M_1 \oplus 2M_2$. ¿Qué pasa a derecha?