Teoría de álgebras

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica 2

Álgebras semisimples

1. Encontrar las representaciones irreducibles del grupo cíclico C_n sobre $\mathbb{R}$. ¿Cómo se descompone $\mathbb{R}C_n$ como producto de álgebras de matrices?
2. Dado un grupo finito G, probar que las representaciones de dimensión 1 de G forman un grupo con la operación dada por el producto tensorial. Probar que si G es abeliano, este nuevo grupo es isomorfo a G. ¿Es un isomorfismo canónico? ¿Qué pasa si G no es abeliano?
3. Recordar que el grupo diedral $\mathbb{D}_n$ está generado por r, s con relaciones $s^2 = r^n = (sr)^2 = 1$. Encontrar la tabla de caracteres de $\mathbb{D}_4$ sobre $\mathbb{C}$.
4. Recordar que el grupo cuaterniónico $\mathbb{H}$ está generado por $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ con relaciones $\mathbf{i}^4 = \mathbf{j}^2\mathbf{i}^2 = \mathbf{jiji}^3 = 1$. Encontrar la tabla de caracteres de $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{C}$.
5. Probar que $\mathbb{C}\mathbb{D}_4 \simeq \mathbb{C}\mathbb{H}$ como álgebras, aunque $\mathbb{D}_4$ y $\mathbb{H}$ no son isomorfos.
6. Sea G un grupo finito y $\mathcal{D}G$ su doble. Sea M un $\mathcal{D}G$-módulo; $M = \oplus_{g\in G} M^g$, $M^g = \delta_g M$ su descomposición en componentes homogéneas. Sea $c \in \mathrm{Aut}(M\otimes M)$ definido por $c(m\otimes n) = gn \otimes m$ si $m \in M^g$. Probar que c satisface la *ecuación de trenzas*:
$$(c \otimes 1)(1 \otimes c)(c \otimes 1) = (1 \otimes c)(c \otimes 1)(1 \otimes c) \in \mathrm{Aut}(M \otimes M \otimes M).$$
7. Sea G un grupo finito, $g \in G$ un elemento y $Z_g = \{x \in G \mid xg = gx\}$ su centralizador. Sea $\rho : \mathbb{K}Z_g \to \mathrm{End}(M)$ una representación de Z_g, y sea $M_{g,\rho} = \mathrm{Ind}_{Z_g}^G \rho = \mathbb{K}G \otimes_{\mathbb{K}Z_g} M$, con la acción a izquierda de G y la G-graduación $\mathrm{gr}(h \otimes m) = hgh^{-1}$. Probar que $M_{g,\rho}$ es un módulo sobre el doble $\mathcal{D}G$. Probar que $M_{g,\rho}$ es irreducible si y solo si M lo es.
8. Sea V un espacio vectorial con una forma bilineal y q su forma cuadrática asociada. Se define el *álgebra de Clifford* $C(V)$ como el álgebra generada por V bajo las relaciones $x^2 = q(x)\ \forall x \in V$.
   a) Si $x \perp y$ (es decir, si $(x|y) = 0$), mostrar que $xy = -yx$.
   b) Considerar la filtración $\mathbb{K}1 = F_0 \subset F_1 \subset \dots$ dada por $F_1 = \mathbb{K}1 \oplus V \subseteq C(V)$. Probar que el álgebra graduada asociada a esta filtración, $\oplus_{n\geq 0} F_{n+1}/F_n$ es isomorfa al álgebra exterior ΛV.
   c) Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base de V. Para $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ se define $x_A =$ "$x_1^{1\in A} \dots x_n^{n\in A}$" $= \prod_{i\in A} x_i$, donde el orden del producto es creciente en i. Probar que $\{x_A\}$ es una base de $C(V)$.
   d) Probar que si q está asociada a una forma bilineal no degenerada y $\mathrm{car}\,\mathbb{K} \neq 2$ entonces $C(V)$ es semisimple. Sugerencia: encontrar una base ortogonal $\{x_1, \dots, x_n\}$ y, dentro de $C(V) \otimes C(V)$, una combinación lineal de los vectores $x_A \otimes x_A^t$, donde $x_A^t = x_n^{n\in A} \cdots x_1^{1\in A}$, así como en $\mathbb{K}G$ se toma el elemento $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \otimes g^{-1}$.