Teoría de álgebras

Segundo Cuatrimestre 2004

Práctica 3

Álgebras de carcaj

(1) Sea C un carcaj, R un ideal admisible de $\mathbb{K}C$, y $M = (M_v, f_\alpha)$ un $\mathbb{K}C/R$-módulo. Definimos el *soporte* de M como el subcarcaj de C cuyos vértices son los $\{v \in V \mid M_v \neq 0\}$ y cuyas flechas son las $\{\alpha \in E \mid f_\alpha \neq 0\}$. Probar que el soporte de un módulo indescomponible es conexo (como grafo).

(2) (a) Describir las clases de isomorfismo de los módulos de dimensión ≤ 2 sobre $\mathbb{K}C$, donde C es el carcaj $\bullet \rightrightarrows \bullet$.

(b) **Definición:** Un álgebra A se dice *mansa* si para cada dimensión $n \in \mathbb{N}$ existen finitos $A - \mathbb{K}[x]$-bimódulos M_i tales que, a excepción de finitos, todos los A-módulos indescomponibles de dimensión n son isomorfos a algun módulo $M_i \otimes_{\mathbb{K}[x]} N$, donde N es un $\mathbb{K}[x]$-módulo indescomponible.
Encontrar módulos M_i como en la definición para el caso $A = \mathbb{K}C$, $n \leq 2$.

(3) (a) Encontrar todos los módulos indescomponibles sobre $\mathbb{K}C$, donde C es un carcaj cuyo diagrama subyacente es de tipo A_n.

(b) Elegir alguna orientación de las flechas de C y descomponer $\mathbb{K}C$ (visto como módulo a izquierda sobre sí mismo) en una suma de módulos indescomponibles.

(4) Sea C el carcaj $\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[dl] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet & \\ & & \bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$. Encontrar todos los módulos indescomponibles sobre $\mathbb{K}C$.

(5) (Tomado de [CLS]) Sea C el carcaj $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & 3 \\ 4 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\varepsilon"] & 6 \end{tikzcd}$ y R el ideal admisible generado por $\varepsilon\gamma$ y $\varepsilon\delta$. Sea $A = \mathbb{K}C/R$. Describir los módulos simples sobre A, los proyectivos indescomponibles, sus radicales y sus radicales cuadrados. Describir los inyectivos indescomponibles. Para esto último puede ser conveniente mirar el carcaj opuesto [CLS, ejs. 1.E y 2.G].

(6) **Definición:** Si A es un álgebra, un A-módulo M tiene *dimensión proyectiva* n si existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde los P_i son módulos proyectivos, y no existe una sucesión similar pero más corta. La dimensión proyectiva de M es ∞ si no existe ninguna sucesión (finita) de este tipo. La *dimensión proyectiva global* de un álgebra A es el supremo de las dimensiones proyectivas de sus módulos.

(a) Encontrar las dimensiones proyectivas de los módulos simples S_i ($i = 1, 2, 5, 6$) para el álgebra del ejercicio (5).

(b) Según un resultado de Auslander, si A es artiniana entonces su dimensión global proyectiva es el máximo de las dimensiones proyectivas de los simples. Probar que en un álgebra $\mathbb{K}C/R$ (C un carcaj, R un ideal admisible), la dimensión global proyectiva está acotada por la longitud del camino dirigido más largo.