Teoría de Álgebras

Segundo cuatrimestre 2004

Práctica 4

Álgebras no asociativas

(1) Sea V un espacio vectorial y $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. Sea

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathrm{End}(V) \mid f(xv, w) + f(v, xw) = 0 \ \forall v, w \in V\}.$$

Probar que $\mathcal{L}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n$. Encontrar $\mathcal{L}$ en los casos:

(B_n) $\dim V = 2n+1$, f está representada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$

(C_n) $\dim V = 2n$, f está representada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

(D_n) ($n \geq 2$) $\dim V = 2n$, f está representada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

Probar que $C_2 \simeq B_2$ y que $D_3 \simeq \mathfrak{sl}_4$.

(2) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ y M un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Si $x \in \mathfrak{g}$, definimos $e^x \in \mathrm{Aut}(M)$ por $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, donde $x^n \in \mathrm{End}(M)$ representa la potencia n-ésima de $x \in \mathrm{End}(M)$. Si A es un álgebra y a la vez un $\mathfrak{g}$-módulo en el que $\mathfrak{g}$ actúa por derivaciones, probar que e^x es un automorfismo de álgebras $\forall x \in \mathfrak{g}$.

(3) Probar que si A es un álgebra de dimensión finita y $C = A^*$ su coálgebra dual, un A-módulo a derecha M da lugar a una estructura de C-comódulo a izquierda sobre el mismo M. Probar que esta construcción es recíproca de la que, dado un C-comódulo a izquierda, le da una estructura de A-módulo a derecha.

(4) (a) Probar que si C es una coálgebra y A es un álgebra (asociativa), el espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ tiene una estructura de monoide dada por

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Encontrar el elemento neutro de este monoide.

(b) Verificar que si H es un álgebra de Hopf, $\mathcal{S}$ la antípoda, entonces $\mathcal{S}$ es inverso de la identidad $1_H : H \to H$ en el monoide $\mathrm{Hom}(H, H)$.

(c) Verificar que en este caso $a \otimes b \mapsto \mathcal{S}(ab)$ y $a \otimes b \mapsto \mathcal{S}(b)\mathcal{S}(a)$ son ambos inversos de la multiplicación $\mu : H \otimes H \to H$ en el monoide $\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$, y por lo tanto coinciden.

(5) Probar que un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo de característica 0 no puede tener elementos primitivos no nulos. Sug: probar que si $x \in H$ es primitivo, x genera una subálgebra isomorfa a $\mathbb{K}[x]$.

(6) Sea $\mathbb{K}\mathbb{S}_\infty = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{K}\mathbb{S}_n$. Comprobar que la siguiente da una estructura de álgebra dendriforme sobre $\mathbb{K}\mathbb{S}_\infty$:

$$\sigma \succ \tau = \sum_{x \in Sh^1_{n,m}} x \circ (\sigma \times \tau), \qquad \sigma \prec \tau = \sum_{x \in Sh^2_{n,m}} x \circ (\sigma \times \tau), \text{ para } \sigma \in \mathbb{S}_n,\ \tau \in \mathbb{S}_m,$$

y donde $Sh^1_{n,m} = \{x \in Sh_{n,m} \mid x(n) < x(n+m)\}$, $Sh^2_{n,m} = \{x \in Sh_{n,m} \mid x(n) > x(n+m)\}$.