

Teoría de Homotopía 2006

Notas y Ejercicios Adicionales II: Complejos Simpliciales y Poliedros

Un poliedro es un espacio topológico que admite una *triangulación* por un *complejo simplicial*, esto va a implicar que podremos analizarlo combinatoriamente.

Los complejos simpliciales quedan definidos por sus vértices y símlices, donde cada n -simplex será un conjunto de $n + 1$ vértices. A cada complejo simplicial K se le asociará un espacio topológico, que llamaremos la realización geométrica de K , que se construye pegando convexos determinados por los símlices. Concretamente:

1 Definición. Un complejo simplicial K consiste en un conjunto de vértices V_K y un conjunto S_K cuyos elementos son subconjuntos finitos no vacíos de V_K (llamados símlices) con las siguientes propiedades:

1. Todo vértice de K es un simplex (es decir, S_K contiene todos los subconjuntos de un elemento de V_K).
2. Todo subconjunto no vacío de un simplex es un simplex (es decir, si $s \in S_K$ y $s' \subset s$ es no vacío, entonces $s' \in S_K$).

Si $s \in S_K$ tiene $n + 1$ elementos, decimos que s es un n -simplex ó, equivalentemente, que $\dim s = n$. Por lo tanto los vértices son los 0-símlices de K .

2 Ejemplos.

1. Si A es un conjunto no vacío cualquiera, podemos definir un complejo simplicial a partir de A tomando como vértices todos los elementos de A y como símlices todos los subconjuntos finitos y no vacíos de A .
2. Sea K el complejo simplicial con 3 vértices a, b, c y cuyos símlices son todos los subconjuntos no vacíos de $\{a, b, c\}$. A este complejo le asociaremos luego un *triángulo lleno*, es decir, el 2-simplex topológico (combinaciones convexas de 3 vértices afínmente independientes).
3. Sea K el complejo simplicial con 3 vértices a, b, c y cuyos símlices son todos los subconjuntos de $\{a, b, c\}$ salvo el conjunto $\{a, b, c\}$. A este complejo le asociaremos el borde del triángulo, es decir el borde del 2-simplex topológico.
4. Al complejo simplicial K con vértices $V_K = \mathbb{Z}$ y símlices

$$S_K = \{\{n\}, \{n, n + 1\}, n \in \mathbb{Z}\}$$

le asociaremos el espacio topológico $\mathbb{R}$.

Como los vértices de K son los 0-símplices, entonces K queda determinado por sus símplexes y por abuso de notación escribiremos $s \in K$ si s es un símplex de K .

Si $s, s' \in K$ y $s' \subseteq s$ diremos que s' es una cara de s y si además $s' \neq s$ entonces es una cara propia de s .

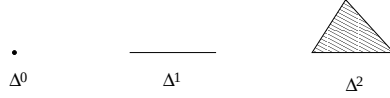
Dado un símplex s de un complejo simplicial K podemos formar un nuevo complejo simplicial $\bar{s}$ cuyos símplexes son todas las caras de s y un complejo simplicial $\dot{s}$ cuyos símplexes son todas las caras propias de s .

El n -esqueleto de un complejo simplicial K es el complejo simplicial K^n que consiste en todos los símplexes de K de dimensión menor o igual a n . Por ejemplo, el 0-esqueleto es el conjunto de vértices de K .

Decimos que K tiene dimensión n si tiene n -símplexes pero no tiene símplexes de dimensión $n + 1$. Notar que esto implica que tampoco tiene símplexes de dimensión mayor a $n + 1$. Decimos que K tiene dimensión infinita si tiene n -símplexes para todo n . Un complejo simplicial K es finito si tiene finitos vértices, o equivalentemente, si tiene finitos símplexes.

3 Definición. Dado $n \geq 0$, el n -símplex topológico es el subespacio

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$



Observar que todo punto $(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n$ puede ser visto como una función

$$\alpha : \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \rightarrow I$$

tal que $\sum \alpha(v_i) = 1$, donde $v_0, \dots, v_n$ son los vértices del símplex topológico. Esto motiva la siguiente definición.

4 Definición. Sea K complejo simplicial. Definimos el conjunto $|K|$ de funciones $\alpha : V_K \rightarrow I$ tales que

1. $\{v \mid \alpha(v) \neq 0\}$ es un símplex en K (en particular, el soporte de α es finito).
2. $\sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1$

Definimos una distancia en $|K|$ con la siguiente fórmula

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_v (\alpha(v) - \beta(v))^2}$$

Notamos $|K|_d$ a este espacio métrico.

En realidad, el espacio topológico que le asociaremos a K no es este espacio métrico sino un espacio topológico con el mismo conjunto subyacente que localmente es como $|K|_d$.

Si s es un simplex en K , definimos el conjunto $|s| \subset |K|$ como

$$|s| = \{\alpha \in |K|, \alpha(v) = 0 \forall v \notin s\}.$$

Observar que, si $\dim s = n$, entonces $|s|$ está en biyección con Δ^n porque una función α que se anula fuera de s puede ser vista como una $(n+1)$ -upla $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$.

5 Definición. Dado un complejo simplicial K , consideramos para todo $s \in K$ el espacio métrico $|s|_d$ con la métrica definida anteriormente (con lo cual $|s|_d$ queda homeomorfo a Δ^n) y le damos al conjunto $|K|$ la topología coherente (final) respecto a todos sus símlices. Explícitamente,

$A \subset |K|$ es abierto (resp. cerrado) sii $A \cap |s|_d$ es abierto (resp. cerrado) en $|s|_d \forall s \in K$.

Notaremos con $|K|$ a este espacio topológico y lo llamaremos la realización geométrica de K .

Observar que una función $f : |K| \rightarrow X$ es continua si y sólo si las restricciones $f : |s|_d \rightarrow X$ son continuas para todo $s \in K$.

Ejercicio 1. Probar que la identidad $1 : |K| \rightarrow |K|_d$ es continua. Deducir que $|K|$ es un espacio Hausdorff.

6 Definición. Sea $s \in K$. Definimos el simplex abierto $\langle s \rangle \subset |K|$ como el subespacio

$$\langle s \rangle = \{\alpha \in |K|, \alpha(v) \neq 0 \text{ sii } v \in s\}$$

Ejercicio 2. Probar que $\langle s \rangle$ es un abierto de $|s|_d$ pero que, en general, no es abierto en $|K|$.

Ejercicio 3. Probar que:

1. Todo $A \subset |K|$ contiene un subespacio A' discreto que consiste en un punto exactamente por cada $\langle s \rangle$ que intesece a A .
2. Si $A \subset |K|$ es compacto, entonces interseca finitos $\langle s \rangle$. En particular, $|K|$ es compacto si y sólo si K es finito.

7 Definición. Una triangulación de un espacio X es un par (K, f) con K complejo simplicial y $f : |K| \rightarrow X$ un homeomorfismo. Un poliedro es un espacio X que admite alguna triangulación.

Observar que un poliedro puede admitir varias triangulaciones diferentes.

Ejercicio 4. Hallar varias triangulaciones distintas para las esferas, los discos, el toro, $\mathbb{R}^n$ y los espacios proyectivos.

8 Definición. Si v es un vértice de K , definimos la característica de v como la función $v : V_K \rightarrow I$

$$v(v') = \begin{cases} 0 & v' \neq v \\ 1 & v' = v \end{cases}.$$

De esta manera podemos identificar los vértices de K con los puntos correspondientes en el espacio $|K|$. Por ejemplo, si K está compuesto por los símplices $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ su realización es

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ 0 \qquad \qquad 1 \end{array}$$

Notar además que toda $\alpha \in |K|$ se escribe como

$$\alpha = \sum_{v \in V_K} \alpha(v).v$$

y por lo tanto todo elemento del espacio $|K|$ se puede escribir en forma única como combinación convexa de finitos vértices de K (con la condición que las coordenadas $\alpha(v)$ sean no nulas).

9 Definición. Un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ entre complejos simpliciales es una función (de conjuntos) $f : V_K \rightarrow V_L$ tal que $f(s)$ es un simplex de L si s es simplex de K .

Un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ induce una función continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$ definida por

$$|f|(\alpha)(v') = \sum_{f(v)=v'} \alpha(v)$$

Notar que si escribimos a $\alpha \in |K|$ como una combinación convexa $\alpha = \sum \alpha(v).v$, entonces $|f|(\alpha) = \sum \alpha(v).f(v)$. Por lo tanto $|f|$ es lineal en cada simplex $|s|$, en particular $|f|$ es continua.

10 Ejemplo. Si K es un 2-simplex con vértices a, b, c y L es un 1-simplex con vértices $0, 1$, entonces la función $f : V_K \rightarrow V_L$ definida por $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) = 1$ define un morfismo simplicial de K a L y su realización $|f| : |K| = \Delta^2 \rightarrow |L| = \Delta^1$ es la función $f(t_0, t_1, t_2) = (t_0 + t_1, t_2)$.

Un subcomplejo $L \subset K$ es un complejo simplicial cuyos vértices y símplices son subconjuntos de los vértices y símplices de K (y por lo tanto la inclusión es un morfismo simplicial).

El subcomplejo $L \subset K$ se dice *pleno* si todo simplex de K cuyos vértices están en L es un simplex de L . Por ejemplo, el borde de un triángulo lleno (2-simplex) no es pleno (los 3 vértices están en L pero todo el 2-simplex no está en L). En cambio, cada vértice y cada lado es un subcomplejo pleno de K .

Subdivisión Baricéntrica y Aproximación Simplicial

11 Definición. Sea $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ un n -simplex de K . Definimos el baricentro de s como el punto $b(s) \in |K|$ dado por

$$b(s) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i.$$

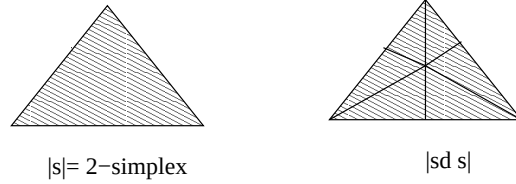
Observar que $b(s) \in \langle s \rangle$.

Por ejemplo, el baricentro de un 0-simplex $s = \{v\}$ es $b(s) = v \in |K|$ y el baricentro de un 1-simplex $s = \{v_0, v_1\}$ es el punto medio del segmento que une v_0 con v_1 en $|K|$.

12 Definición. Dado un complejo simplicial K , definimos su subdivisión baricéntrica como el complejo simplicial $sd K$ cuyos vértices son todos los baricentros de los símplexes de K y los símplexes son todos los conjuntos ordenados finitos $\{b(s_0), \dots, b(s_n)\}$ con s_i cara propia de s_{i+1} para todo i .

Notar que los vértices de $sd K$ son puntos de $|K|$ y que si s' es un simplex de la subdivisión, entonces existe un simplex s de K tal que $s' \subset |s|$.

La función lineal $|sd K| \rightarrow |K|$ inducida por la identidad en los vértices es un homeomorfismo y de esta forma identificamos la realización geométrica de la subdivisión con la realización geométrica de K .

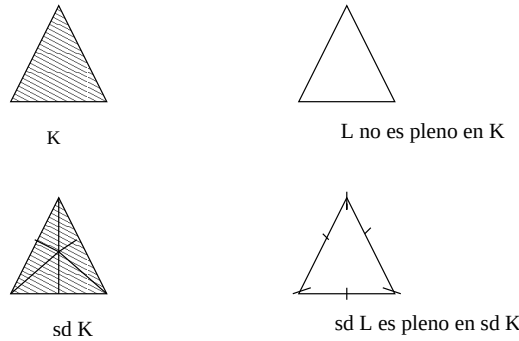


Inductivamente podemos definir

$$\begin{cases} sd^0(K) = K \\ sd^{n+1}(K) = sd(sd^n K) \end{cases}$$

E identificamos todos los espacios $|sd^n K| = |K|$.

Ejercicio 5. Si $L \subset K$ es un subcomplejo, entonces $sd L \subset sd K$ es un subcomplejo pleno.



Un *par poliédrico* (X, A) es un par topológico que admite triangulación por un complejo simplicial K y un subcomplejo $L \subset K$ respectivamente. Por ejemplo, (D^n, S^{n-1}) es un par poliédrico tomando $(K, L) = (s, \dot{s})$ con s un n -simplex.

Recordemos que un par bueno (X, A) es un par topológico Hausdorff con $A \subset X$ cerrado y con la propiedad que existe un abierto $A \subset U \subset X$ tal que la inclusión de A en U es un retracts por deformación fuerte.

13 Proposición. *Todo par poliédrico (X, A) es un par bueno.*

Demostración. Sean $L \subset K$ tales que $X = |K|$ y $A = |L|$.

Por el ejercicio anterior, cambiando $L \subset K$ por $sd L \subset sd K$, podemos suponer que L es pleno en K .

Sea $N \subset K$ el máximo subcomplejo disjunto con L . Explícitamente, $V_N = V_K - V_L$ y $S_N = \{s \in S_K, \text{ los vértices de } s \text{ están en } N\}$.

Notar que N también resulta pleno por construcción y que todo simplex $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ de K cumple una de estas tres cosas:

1. $s \in S_L$ ó
2. $s \in S_N$ ó
3. Existe $0 \leq p \leq n$ tal que $\{v_0, \dots, v_p\}$ es simplex en L y $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ es simplex en N .

Tomamos $U = |K| - |N|$ que es abierto en $|K| = X$. Es claro que $A = |L| \subset U$. Definimos una retracción $r : U \rightarrow A$ de la siguiente manera:

Sea $\alpha \in U$. Si $\alpha \in A$, entonces $r(\alpha) = \alpha$. Si $\alpha \notin A = |L|$, entonces $\alpha = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot v_i$ con $\{v_0, \dots, v_n\}$ simplex en K . En este caso, como α no está en $|N|$ ni en $|L|$, entonces existe un $0 \leq p \leq n$ tal que $\{v_0, \dots, v_p\}$ es simplex en L y $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ es simplex en N .

Tomamos $a = \sum_{i=0}^p \alpha_i$. Observar que $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Definimos $\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{a}$ para $i = 0, \dots, p$ y $\alpha''_i = \frac{\alpha_i}{1-a}$ para $i = p+1, \dots, n$ y por lo tanto se tiene

$$\alpha = a\alpha' + (1-a)\alpha''$$

con $\alpha' = \sum_{i=0}^p \alpha'_i v_i \in |L|$ y $\alpha'' = \sum_{i=p+1}^n \alpha''_i v_i \in |N|$.

Y entonces podemos definir $r(\alpha) = \alpha'$ si $\alpha \notin |L|$. De esta forma la función $r : U \rightarrow A$ está bien definida, resulta continua y es retracción.

Además $1_U \simeq ir$ via la homotopía

$$H(\alpha, t) = \begin{cases} \alpha & \alpha \in |L| \\ t\alpha' + (1-t)\alpha & \alpha \notin |L|. \end{cases}$$

□

Vimos que todo simplex $|s| \subset |K|$ se identifica con un convexo de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto hereda la métrica usual de $\mathbb{R}^n$ que llamaremos métrica lineal en s . De esta forma, decimos que $|K|$ tiene una métrica lineal si cada simplex s la tiene.

Dado un complejo simplicial K y una métrica lineal en $|K|$, definimos

$$diam(s) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in s\}$$

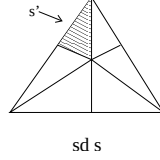
Es fácil ver que, si $s = \{v_0, \dots, v_n\}$, entonces

$$diam(s) = \max_{i,j} \|v_i - v_j\|$$

Definimos también

$$\text{mesh}(K) = \sup_{s \in K} \{\text{diam}(s)\}$$

Supongamos que s es un simplex de K y lo consideramos como un complejo simplicial $\overline{s}$. Tomamos un simplex $s' \in \text{sd}(\overline{s})$ y queremos comparar el diámetro de s' con el de s .



El siguiente resultado, relaciona ambos diámetros:

Ejercicio 6. Si s es un m -simplex y s' es un simplex de $\text{sd}(\overline{s})$ entonces

$$\text{diam}(s') \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(s)$$

Como consecuencias inmediatas de resultado lema obtenemos los siguientes resultados.

Ejercicio 7. Si K es complejo simplicial m -dimensional, entonces

$$\text{mesh}(\text{sd } K) \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh}(K)$$

Ejercicio 8. Si K es finito, para todo $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{mesh}(\text{sd}^r(K)) < \varepsilon$$

Comenzaremos ahora a estudiar aproximaciones simpliciales de funciones continuas entre poliedros. Recordemos que todo morfismo simplicial $\phi : K \rightarrow L$ induce una función continua $|\phi| : |K| \rightarrow |L|$ que es lineal en cada simplex de K .

Es claro que hay muchas funciones continuas entre $|K|$ y $|L|$ que no son inducidas por morfismos simpliciales (no toda función continua $f : I \rightarrow I$ es lineal !!). Nuestro objetivo es probar que las funciones continuas entre poliedros pueden ser *aproximadas* por funciones inducidas por morfismos simpliciales (que llamaremos directamente funciones simpliciales).

14 Definición. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua. Una aproximación simplicial de f es un morfismo simplicial $\phi : K \rightarrow L$ que cumple lo siguiente:

$$\text{Si } f(\alpha) \in s \Rightarrow |\phi|(\alpha) \in s \quad \forall s \in L, \alpha \in |K|$$

Equivalentemente, si $f(\alpha) \in s \Rightarrow |\phi|(\alpha) \in s$.

Observar que, si ϕ aproxima a f y $f(v)$ es un vértice de L para algún vértice v de K , entonces $\phi(v) = f(v)$. De esto se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Ejercicio 9. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua y sea $T \subset K$ un subcomplejo tal que $f|_{|T|}$ es simplicial. Si $\phi : K \rightarrow L$ es una aproximación simplicial de f , entonces $|\phi||_{|T|} = f|_{|T|}$.

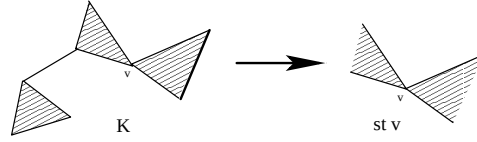
15 Ejemplo. Sea K el 1-simplex con vértices 0 y 1 (por lo tanto $|K| = I$). La función $f : I \rightarrow I$, $f(x) = \frac{1}{2}x$ puede ser aproximada por el morfismo simplicial identidad $1_K : K \rightarrow K$ y por el morfismo simplicial constante 0 pero no puede ser aproximada por el morfismo simplicial constante 1.

Ejercicio 10. Sea $\phi : K \rightarrow L$ una aproximación simplicial de $f : |K| \rightarrow |L|$. Entonces $f \simeq |\phi|$. Más aún, si $f|_{|T|} = |\phi||_{|T|}$, entonces $f \simeq |\phi|$ relativo a $|T|$.

Para probar los teoremas de aproximaciones simpliciales, necesitamos introducir la noción de estrella de un vértice $st\ v$.

16 Definición. Sea v un vértice de un complejo simplicial K . La estrella de v es el subespacio

$$st\ v = \{\alpha \in |K|, \alpha(v) \neq 0\}.$$



Ejercicio 11. Sean $v_0, \dots, v_n$ vértices de K . Entonces $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ es un simplex de K si y sólo si $\bigcap_{i=0}^n st(v_i) \neq \emptyset$.

Es claro que $st\ v \subset |K|$ es siempre abierto. Más aún, $\{st\ v\}_{v \in V_K}$ es un cubrimiento por abiertos de $|K|$. En particular, si $f : |K| \rightarrow |L|$ es continua, entonces

$$\{f^{-1}(st\ v)\}_{v \in V_L}$$

es un cubrimiento por abiertos de $|K|$.

17 Teorema. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua y $\phi : V_K \rightarrow V_L$ función de conjuntos. Entonces, ϕ es aproximación simplicial de f si y sólo si $f(st\ v) \subseteq st(\phi(v))$ para todo $v \in V_K$.

Demostración. Supongamos primero que ϕ es aproximación simplicial de f y veamos que $f(st\ v) \subseteq st(\phi(v))$ para todo $v \in V_K$.

Sea v vértice de K . Tomamos $\alpha \in st\ v$, entonces $\alpha(v) \neq 0$. Sea s simplex en K tal que $\alpha \in s$ y sea s' simplex en L tal que $f(\alpha) \in s'$.

Como ϕ aproxima a f , entonces $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. Por otro lado, como $|\phi|$ es lineal en cada simplex, entonces

$$|\phi|(\alpha)(\phi(v)) = \sum_{\phi(v')=\phi(v)} \alpha(v') \neq 0$$

y por lo tanto $\phi(v)$ es vértice de s' y como $f(\alpha) \in s'$, entonces $f(\alpha) \in st(\phi(v))$ (la coordenada del punto $f(\alpha)$ correspondiente al vértice $\phi(v)$ es no nula).

Con esto probamos que $f(st\ v) \subseteq st(\phi(v))$.

Veamos ahora la otra implicación. Primero debemos probar que la función de conjuntos ϕ es un morfismo simplicial.

Si $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ es un simplex en K , entonces por el lema anterior, $\bigcap st(v_i) \neq \emptyset$ y por lo tanto

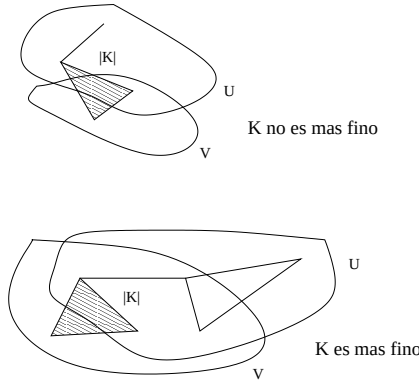
$$\emptyset \neq f\left(\bigcap st(v_i)\right) \subset \bigcap f(st(v_i)) \subset \bigcap st(\phi(v_i))$$

y nuevamente por el lema anterior, se deduce que $\{\phi(v_0), \dots, \phi(v_n)\}$ es simplex en L . Esto prueba que ϕ es simplicial.

Veamos ahora que ϕ aproxima a f .

Sea $\alpha \in |K|$ y supongamos que $f(\alpha) \in s' >$. Debemos ver que $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. Sea s simplex de K tal que $\alpha \in s >$. Para todo v3rtice v de s , se tiene que $\alpha(v) \neq 0$ y por lo tanto $\alpha \in st v$. Como $f(st v) \subset st(\phi(v))$, se tiene que $f(\alpha)(\phi(v)) \neq 0$ y por lo tanto $\phi(v)$ es v3rtice de s' . Esto prueba que ϕ manda los v3rtices de s en v3rtices de s' y como ϕ es simplicial entonces $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. $\square$

18 Definici3n. Sea K complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento por abiertos de $|K|$. Decimos que K es m3s fino que $\mathcal{U}$ si para todo v3rtice v de K existe un abierto U_i del cubrimiento tal que $st v \subset U_i$.



Ejercicio 12. Una funci3n continua $f : |K| \rightarrow |L|$ admite una aproximaci3n simplicial $\phi : K \rightarrow L$ si y s3lo si K es m3s fino que el cubrimiento $\{f^{-1}(st v)\}_{v \in V_L}$.

Supongamos que $K' = sd^m K$ para alg3n m . Como corolario inmediato del teorema 17 vemos que una funci3n

$$\phi : V_{K'} \rightarrow V_K$$

es una aproximaci3n simplicial de la identidad $1 : |K'| \rightarrow |K|$ si y s3lo si $v \in st(\phi(v))$ para todo v3rtice v de K' . Observemos entonces tambi3n que siempre podremos encontrar aproximaciones simpliciales de la identidad $1 : |K'| \rightarrow |K|$.

Ahora juntemos varios resultados que ya conocemos para probar la existencia de aproximaciones simpliciales.

Si K es un complejo simplicial finito, sabemos que $|K|$ es compacto. Por lo tanto todo cubrimiento por abiertos admite subcubrimiento finito. Tambi3n sabemos que si subdividimos K las veces necesarias, entonces $mesh(sd^m K)$ se hace tan chico como uno quiera y por lo tanto probamos el siguiente resultado.

Ejercicio 13. Si $f : |K| \rightarrow |L|$ es continua y K es finito, entonces existe un natural n_0 y aproximaciones simpliciales de f

$$\phi_n : sd^n(K) \rightarrow L, \forall n \geq n_0.$$

Observar que se necesitan todas las subdivisiones para poder aproximar todas las funciones continuas $f : K \rightarrow L$. Por ejemplo, si s es el 2-simplex y tomamos $K = L = \dot{s}$ (las caras propias), tenemos que $|K| = |L| = S^1$. Como el grupo fundamental de S^1 es $\mathbb{Z}$ entonces hay infinitas clases homotópicas de funciones continuas $f : S^1 \rightarrow S^1$. Pero por otra parte para todo n existen solamente finitos morfismos simpliciales $\phi : sd^n(\dot{s}) \rightarrow \dot{s}$.

Veamos algunas aplicaciones topológicas interesantes del teorema anterior.

19 Proposición. Si $m < n$, toda función continua $f : S^m \rightarrow S^n$ es null homotópica (o lo que es lo mismo, se puede extender al disco D^{m+1}). Es decir, $\pi_m(S^n) = 0$ si $m < n$.

Demostración. Consideramos $S^m = |\dot{s}|$ y $S^n = |\dot{s}'|$ con s un $m+1$ -simplex y s' un $n+1$ -simplex.

Por el teorema anterior sabemos que existe aproximación simplicial

$$\phi : sd^r \dot{s} \rightarrow \dot{s}'$$

Como $f \simeq |\phi|$, basta ver que $|\phi|$ es null homotópica.

Ahora bien, como la dimensión de $sd^r(\dot{s})$ es m y $m < n$, entonces existe un simplex en $\dot{s}'$ que no es imagen de ningún simplex de $sd^r(\dot{s})$ y por lo tanto existe un $\alpha \in |\dot{s}'|$ tal que $\alpha \notin Im(|\phi|)$.

Por lo tanto $|\phi|$ no es sobreyectiva y se tiene

$$|\phi| : S^m \rightarrow S^n - \{\alpha\} \simeq \mathbb{R}^n$$

y como $\mathbb{R}^n$ es contráctil, vale que $|\phi|$ es null homotópica. $\square$

Ejercicio 14. Sea X un conjunto y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una colección de subconjuntos de X . El nervio de $\mathcal{U}$ es el complejo simplicial $K(\mathcal{U})$ cuyos símlices son los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathcal{U}$, $s = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{i_k} \neq \emptyset$.

1. Probar que efectivamente $K(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial.
2. Sea K complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{st v | v \in K\}$ cubrimiento abierto de $|K|$. Probar que la función que le asigna a cada vértice v de K el abierto $st v$ de $|K|$ induce un isomorfismo simplicial $K = K(\mathcal{U})$.

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de un espacio topológico X y sea $K(\mathcal{U})$ su nervio. Una función continua $f : X \rightarrow |K(\mathcal{U})|$ se dice canónica si $f^{-1}(st U) \subset U$ para todo U del cubrimiento $\mathcal{U}$. Probar que:

1. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de X , existe una biyección entre las funciones canónicas $X \rightarrow |K(\mathcal{U})|$ y las particiones de la unidad subordinadas a $\mathcal{U}$.
2. Si $\mathcal{U}$ es cubrimiento localmente finito de X , entonces todas las funciones canónicas $X \rightarrow |K(\mathcal{U})|$ son homotópicas.

Ejercicio 16. Un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y $\dim X \not\leq n-1$. Probar que:

1. Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $\dim A \leq \dim X$.
2. Si K complejo simplicial finito y $\dim K \leq n$ entonces $\dim |K| \leq n$.
3. Si s es un n -simplex, entonces $\dim |s| = n$.
4. Si X es espacio paracompacto y $\dim X \leq n$, entonces toda función continua $f : X \rightarrow S^m$ es nullhomotópica para $m > n$.

Ejercicio 17. Sea X un espacio métrico compacto y sea C el espacio de funciones continuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ con la métrica:

$$d(f, g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\| \mid x \in X\}$$

Probar que:

1. C es espacio métrico completo.
2. Para todo $m \in \mathbb{N}$, el subconjunto

$$C_m = \{f \in C \mid \text{diam}(f^{-1}(z)) < \frac{1}{m} \ \forall \ z \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$$

es abierto en C .

3. $\bigcap C_m$ es el conjunto de homeomorfismos de X en $\mathbb{R}^{2n+1}$.
4. Si $\dim X \leq n$, entonces C_m es denso en C para todo m . Deducir que, en este caso, X puede ser inmerso en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Ejercicio 18. Una pseudovariedad n -dimensional es un complejo simplicial K que cumple lo siguiente:

- (I) K es homogéneamente n -dimensional, es decir, todo simplex de K es cara de algún n -simplex.
- (II) Todo $(n-1)$ -simplex de K es cara de a lo sumo dos n -símplices.
- (III) Para todo par de n -símplices s, s' , existe una sucesión finita $s = s_0, s_1, \dots, s_r = s'$ de n -símplices tales que s_i y s_{i+1} tienen una $(n-1)$ -cara en común para todo i .

El *borde* de una pseudovariedad de dimensión n es el subcomplejo $\dot{K}$ generado por los $(n-1)$ -símplices que son caras de exactamente un n -simplex de K . Si $\dot{K}$ es vacía decimos que K es una pseudovariedad sin borde.

Probar lo siguiente:

1. Un n -simplex s es una pseudovariedad n -dimensional y su borde (como pseudovariedad) es $\dot{s}$.
2. El borde de una pseudovariedad finita de dimensión 1 es vacío o tiene exactamente dos vértices.