Teoría de Homotopía 2006

Adicional I: Grafos.

Un grafo es un espacio topológico que se arma a partir de un conjunto discreto de puntos (llamados vértices), pegando (adjuntando) copias del intervalo unitario real I (que formarán las aristas del grafo). Los dos puntos del borde de cada intervalo que se adjunta pueden estar pegados a distintos vértices o eventualmente al mismo. Con esta definición permitimos tanto aristas múltiples entre vértices como también se permiten lazos. Cuando estudiemos CW-complejos, se verá que un grafo es exactamente un CW-complejo de dimensión uno. La definición formal es la siguiente:

Notamos con $S^0 = \{0, 1\}$ al borde del intervalo unitario $I = [0, 1]$.

Definición. Un grafo X us un espacio que se obtiene de un conjunto (espacio discreto) X^0 de puntos, llamados vértices y de un conjunto J de funciones $j : S^0 \to X^0$, tomando el espacio cociente de la unión disjunta $X^0 \cup (J \times I)$ identificando los puntos $(j, 0)$ con $j(0)$ y los puntos $(j, 1)$ con $j(1)$. Las imágenes de los intervalos $\{j\} \times I$ se llaman aristas.

Un grafo se dice finito si tiene finitos vértices y aristas. Un grafo es localmente finito si cada vértice es borde de una cantidad finita de aristas.

Ejercicio Uno. Probar que un grafo es finito si y sólo si es compacto y es localmente finito si y sólo si es localmente compacto.

Ejercicio Dos. Probar que los grafos son localmente contráctiles (dado cualquier punto y cualquier entorno del punto, existe un entorno contráctil del punto contenido en el entorno inicial).

Observar que, como los grafos son localmente contráctiles, entonces tienen revestimientos.

Árboles y Tipos Homotópicos de Grafos.

Una arista orientada $k : I \to X$ en un grafo X es el recorrido de una arista de X en una dirección (del 0 al 1) o en la otra (del 1 al 0). Un camino de aristas es una composición finita de aristas orientadas $k_1 \dots k_n$ tales que $k_{i+1}(0) = k_i(1)$. El camino se dice reducido si k_{i+1} no es k_i en la dirección contraria (para ningún i). El camino se dice cerrado si empieza y termina en el mismo vértice.

Definición. Un árbol es un grafo conexo que no tiene caminos cerrados reducidos.

Antes de plantear el próximo ejercicio, recordemos que un subespacio $A \subset Y$ es un retracto por deformación fuerte si existe una función continua $r : Y \to A$ (llamada retracción) tal que $ri = 1_A$ e $ir \simeq 1_Y \; rel \; A$ (donde i denota la inclusión de A en Y).

Ejercicio Tres. Probar que cualquier vértice v de un árbol T es un retracto por deformación fuerte de T. (Sugerencia: Para el caso finito se puede hacer por inducción en la cantidad de aristas. Para el caso infinito, usar que todo vértice w está contenido en un subárbol finito T_w que contiene también al vértice inicial v).

Un subgrafo A de un grafo X es un grafo tal que $A \subset X$ y $A^0 \subset X^0$ (es decir, A es unión de algunos de los vértices y algunas de las aristas de X).

Un subárbol del un grafo X se dice maximal si no está contenido estrictamente en otro subárbol de X.

Ejercicio Cuatro. Probar que todo árbol T que es un subgrafo de un grafo X está contenido en un subárbol maximal. Además, si el grafo X es conexo, entonces un árbol en X es maximal si y sólo si contiene a todos los vértices de X.

Ejercicio Cinco. Sea X un grafo conexo con árbol maximal T. Probar que el espacio cociente X/T es la unión en un punto de tantas copias de esferas unidimensionales S^1 como aristas de X que no están en T.

Utilizando teoría básica de CW-complejos y cofibraciones, podríamos probar (usando que los árboles son contráctiles) que la función cociente $q : X \to X/T$ es equivalencia homotópica. Como todavía no se vieron estos temas, el próximo ejercicio pide una demostración a mano de este hecho para el caso particular de los grafos:

Ejercicio Seis. Sea X un grafo conexo con árbol maximal T. Probar que la función cociente $q : X \to X/T$ es una equivalencia homotópica.

En definitiva: Como corolario de los dos últimos ejercicios, se ve que los grafos conexos tienen el tipo homotópico de una unión de esferas unidimensionales (tantas como aristas de X que no estén en un árbol maximal). En particular, por Van Kampen, el grupo fundamental de un grafo conexo es el grupo libre con tantos generadores como aristas de X que no pertenezcan a un árbol maximal.

Revestimientos y Característica de Euler.

La característica de Euler $\chi(X)$ de un grafo finito X se define como

$$\chi(X) = V - E$$

donde V es la cantidad de vértices y E la cantidad de aristas del grafo.

Ejercicio Siete. Probar que la característica de Euler de los árboles vale 1. (Sugerencia: inducción en cantidad de aristas).

Ejercicio Ocho. Utilizando los resultados anteriores, probar que el grupo fundamental de un grafo conexo finito es el grupo libre en $1 - \chi(X)$ generadores. En particular, $\chi(X) \leq 1$ y vale la igualdad si y sólo si X es un árbol.

Ahora nos ocuparemos de los revestimientos de los grafos (que son importantes para deducir algunos resultados sobre grupos, que veremos después). Utilizando las propiedades de levantamiento de los revestimientos (práctica cero), probar el siguiente teorema:

Ejercicio Nueve. Sea B un grafo conexo con conjunto de vértices B^0 y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Entoces E es un grafo conexo con conjunto de vértices $E^0 = p^{-1}(B^0)$ y con una arista por cada arista j de B y cada punto e en la fibra de $j(0)$. Además, si B es grafo finito y las fibras de $p : E \to B$ tienen cardinal finito n, entoces E resulta grafo finito y $\chi(E) = n\chi(B)$.

Aplicaciones.

Si G es un grupo libre, podemos encontrar un grafo X cuyo grupo fundamental sea isomorfo a G: simplemente bastará tomar una unión en un punto de tantas copias de esferas unidimensionales como generadores tenga el grupo (por corolario de Van Kampen). Dado un subgrupo H del grupo libre G, por el teorema de existencia y clasificación de revestimientos, existe un revestimiento $p : E \to X$ tal que $p_*(\pi_1(E, e)) = H$, pero, por otro lado, hemos visto que los revestimientos de grafos son grafos y que los grupos fundamentales de grafos son grupos libres. Esto sirve como sugerencia para probar el siguiente ejercicio (Teorema):

Ejercicio Diez. Todo subgrupo H de un grupo libre G es un grupo libre. Además, si G es libre con k generadores y H tiene índice finito n en G, entonces H es libre con $1 - n + nk$ generadores.

Por último, veremos que, dado cualquier grupo G, existe un espacio conexo X cuyo grupo fundamental es isomorfo a G.

Sea G un grupo cualquiera. Existe un grupo libre F y un subgrupo normal N de F tal que $G = F/N$. Como F es libre, podemos tomar (como ya lo hicimos) un grafo conexo B (union de esferas en un punto) cuyo grupo fundamental sea F y por clasificación de revestimientos, podemos encontrar un revestimiento $p : E \to B$ tal que $p_*(\pi_1(E)) = N$.

Consideremos ahora el cono de E, $CE = E \times I/(E \times \{1\})$ es decir que tomamos el cilindro $E \times I$ e identificamos todos los puntos de arriba $(E \times \{1\})$. Notar que se tiene una inclusión de E en su cono CE via $i(e) = (e, 0)$. Tomamos el espacio X que se obtiene de unir B con CE e identificando los puntos $p(e)$ en B con los puntos $i(e) = (e, 0)$ de CE.

Considerar los abiertos siguientes de X: tomar U como la imagen en X de $B \cup (E \times [0, 3/4))$ y V como la imagen en X de $E \times (1/4, 1]$. Usando Van Kampen, probar que el grupo fundamental de X es isomorfo a G y por lo tanto se tiene:

Ejercicio Once. Dado un grupo G, existe un espacio conexo X tal que $\pi_1(X) = G$.