

Notas de Topología Algebraica

ELÍAS GABRIEL MINIAN

Departamento de Matemática.
FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
Buenos Aires, Argentina

Tabla de Contenidos

Introducción	4
1 Preliminares	5
1.1 Homotopías y Deformaciones	5
1.2 Complejos Simpliciales y Poliedros	11
1.3 CW-Complejos	23
2 Homología	29
2.1 Sucesiones Exactas, Complejos y Homología	29
2.2 Homología Simplicial	33
2.3 Homología Singular	37
3 Aplicaciones	48
3.1 Aplicaciones Básicas	48
3.2 Números de Betti y Característica de Euler	49
3.3 Teorema de Separación de Jordan-Brouwer	51
Bibliografía	56

Listas de Ejercicios

Ejercicios Sección 1.1	10
Ejercicios Sección 1.2	21
Ejercicios Sección 1.3	28
Ejercicios Sección 2.1	32
Ejercicios Sección 2.2	37
Ejercicios Sección 2.3	45
Ejercicios Capítulo 3	55

Introducción

Estas notas están pensadas como un complemento de mi curso de Topología Algebraica del II Encuentro Nacional de Algebra (Vaquerías, Agosto 2004). El objetivo principal de este curso es mostrar las ideas y herramientas básicas de la topología algebraica, haciendo principal hincapié en las teorías de homología de espacios topológicos y sus aplicaciones.

Las notas están divididas en tres capítulos. Cada capítulo cuenta a su vez con algunas secciones y al final de varias de las secciones hay listas de ejercicios.

El primer capítulo trata sobre homotopía, deformaciones, poliedros y CW-complejos. En el segundo capítulo se desarrollan las teorías de homología singular y simplicial. En el tercer capítulo estudiamos varias aplicaciones de la homología.

Los resultados que se exponen en estas notas pueden ser consultados en varios libros conocidos de Topología Algebraica, detallados en la bibliografía al final de las notas. Sin embargo, el enfoque que aquí se le da a algunos de los temas, como así también algunos ejemplos y demostraciones son distintos de los que se pueden encontrar en los libros tradicionales de la materia.

Quiero agradecer a Miguel Ottina por sus sugerencias y su ayuda con la corrección de estas notas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo repasaremos las nociones de homotopía y homotopía relativa. Estudiaremos deformaciones de espacios e introduciremos algunas herramientas básicas de la teoría de homotopía como son los conos y cilindros de espacios y funciones. Luego estudiaremos algunos espacios que tienen muy buenas propiedades y que se utilizan mucho en topología como los poliedros y, en general, los CW-complejos.

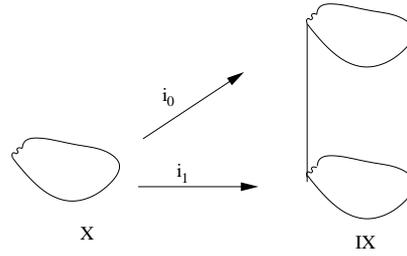
1.1 Homotopías y Deformaciones

Comencemos recordando que dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas si una puede deformarse continuamente en la otra, es decir, si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$, llamada homotopía de f a g , tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$ (I denota el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$). En este caso denotaremos $f \simeq g$ ó $H : f \simeq g$ si queremos especificar una homotopía H de f a g .

Recordemos también que \simeq es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones continuas de X a Y . Por ejemplo, para probar que la relación es simétrica, usamos que, si $H : f \simeq g$, entonces $\overline{H} : g \simeq f$, donde $\overline{H}(x, t) = H(x, 1-t)$. Para probar la transitividad se usa la *composición vertical* de homotopías $H : f \simeq g$ y $G : g \simeq h$ (denotada $H * G : f \simeq h$) y que está definida por

$$H * G(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

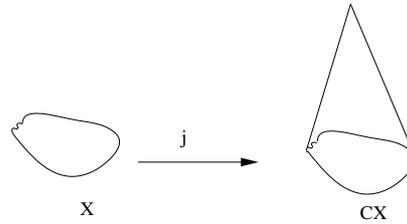
1.1.1 Definición y Observación. Dado un espacio X , definimos el cilindro de X como el espacio $IX = X \times I$. Notar que se tienen las inclusiones $i_0, i_1 : X \rightarrow IX$ definidas por $i_0(x) = (x, 0)$ y por $i_1(x) = (x, 1)$, es decir, las inclusiones de X en la tapa de abajo y de arriba del cilindro. Por lo tanto una homotopía entre dos funciones f y g no es otra cosa que una función continua H definida en el cilindro de X tal que la restricción a las tapas del cilindro son respectivamente f y g .



1.1.2 Definición. Se define el cono de un espacio X como el espacio que se obtiene del cilindro de X identificando todos los puntos de una tapa en uno solo. Es decir,

$$CX = IX / \sim$$

donde $(x, 0) \sim (x', 0) \forall x, x' \in X$, con la topología cociente. Notamos con $\overline{(x, t)}$ la clase en el cociente. Observar que se tiene una inclusión de X en la tapa del cono, $j : X \rightarrow CX$, $j(x) = \overline{(x, 1)}$.



1.1.3 Ejemplo. El cono de la esfera n -dimensional $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ es el disco unitario $(n + 1)$ -dimensional $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| \leq 1\}$ y la inclusión $j : S^n \rightarrow CS^n = D^{n+1}$ es la inclusión en el borde del disco.

1.1.4 Definición. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ se dice null homotópica si es homotópica a alguna función constante $c : X \rightarrow Y$.

1.1.5 Proposición. $f : X \rightarrow Y$ es null homotópica si y sólo si se puede extender continuamente al cono de X , es decir, si existe una función continua $\tilde{f} : CX \rightarrow Y$ tal que $\tilde{f}j = f$.

La demostración de esta proposición es simple y se deja como ejercicio al lector. Notemos que para el caso particular de $X = S^n$ se deduce que una función continua $f : S^n \rightarrow Y$ se puede extender a todo el disco si y sólo si es homotópica a una constante. De todas formas, volveremos a este resultado más adelante y lo ampliaremos.

Ahora comenzaremos a estudiar las deformaciones de espacios. Para eso necesitamos definir la idea de equivalencia homotópica.

1.1.6 Definición. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $fg \simeq 1_Y$ y $gf \simeq 1_X$, donde $1_X : X \rightarrow X$ denota la función identidad de X . La función $g : Y \rightarrow X$ es una *inversa homotópica* de f . Dos espacios X, Y son equivalentes homotópicos (o tienen el mismo tipo homotópico) si existe alguna $f : X \rightarrow Y$ equivalencia homotópica. Un espacio X se dice *contráctil* si es equivalente homotópico al espacio de un solo punto $*$.

1.1.7 Ejemplos.

(a) Todo convexo de \mathbb{R}^n es contráctil. Más en general, todo espacio estrellado de \mathbb{R}^n es contráctil (un espacio estrellado X es un espacio que contiene todos los segmentos que unen los puntos de X con un punto base $x_0 \in X$).

(b) La inclusión

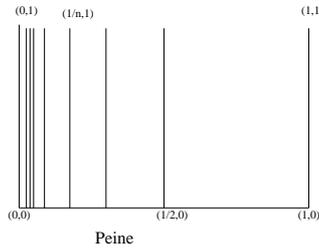
$$i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

es una equivalencia homotópica con inversa homotópica

$$r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$$

definida por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

(c) Definimos el peine $P \subset \mathbb{R}^2$ como el subespacio de \mathbb{R}^2 que se obtiene uniendo el segmento que va desde el origen al punto $(1, 0)$ con el segmento que une el origen con el $(0, 1)$ y todos los segmentos que van desde el $(\frac{1}{n}, 0)$ hasta el $(\frac{1}{n}, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se puede probar que el peine es contráctil: una deformación posible del espacio en el origen es primero bajando todos los puntos al segmento horizontal y luego deformar ese segmento al origen.



1.1.8 Observación. El cono CX es contráctil (cualquiera sea el espacio X). Una homotopía $H : CX \times I \rightarrow CX$ entre una constante y la identidad puede ser definida como $H(\overline{(x,t)}, s) = \overline{(x,ts)}$

La demostración de la siguiente proposición es simple y queda como ejercicio para el lector.

1.1.9 Proposición. *Sea X un espacio. Son equivalentes*

- (a) X es contráctil.
- (b) La identidad 1_X es null homotópica.
- (c) La identidad es homotópica a toda función constante $c : X \rightarrow X$.
- (d) Toda $f : Y \rightarrow X$ continua es null homotópica (para cualquier espacio Y).
- (e) Toda $g : X \rightarrow Z$ continua es null homotópica (para cualquier espacio Z).

Muchas veces se necesita trabajar con homotopías de funciones que sean constantes en un subespacio. Por ejemplo, para definir el grupo fundamental de un espacio se utilizan homotopías de lazos que en cada instante de la deformación mantengan fijos los puntos extremos. Concretamente:

1.1.10 Definición. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas y $A \subseteq X$ subespacio tal que $f|_A = g|_A$. Decimos que f es homotópica a g relativo a A (y notamos $f \simeq g \text{ rel } A$) si existe una homotopía $H : f \simeq g$ que cumpla además $H(a, t) = f(a) = g(a) \forall a \in A, t \in I$.

Por ejemplo, un espacio estrellado de \mathbb{R}^n a partir de un punto x_0 (es decir que el espacio contiene todos los segmentos que unen sus puntos a x_0) es contráctil relativo a x_0 . Geométricamente esto dice que el espacio se puede deformar en el punto x_0 y en la deformación el punto x_0 se mantiene fijo todo el tiempo.

El peine $P \subset \mathbb{R}^2$ es contráctil pero no es contráctil relativo al punto $(0, 1) \in P$ ya que durante la deformación del espacio en ese punto, el punto en cuestión no puede mantenerse fijo (debido a la topología que tiene el peine).

Ahora trataremos de clarificar un poco las distintas nociones de deformación de un espacio en un subespacio.

1.1.11 Definición. Un subespacio $A \subset X$ es un retracto si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ llamada retracción tal que $ri = 1_A$ (donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusión del subespacio).

Por ejemplo, dado un espacio X cualquiera y un punto $x \in X$ entonces el subespacio $A = \{x\}$ es siempre un retracto de todo el espacio.

Veremos más adelante que S^n no es retracto de D^{n+1} .

1.1.12 Definición. Decimos que $A \subset X$ es un retracto por deformación si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $ri = 1_A$ (es decir, un retracto) que además cumple $ir \simeq 1_X$ (es decir, r es un retracto que es también equivalencia homotópica). A será un retracto por deformación fuerte si la homotopía $ir \simeq 1_X$ es relativa a A .

Por ejemplo, un punto $x \in X$ es un retracto por deformación si y sólo si X es contráctil. Más aún, $x \in X$ es retracto por deformación fuerte si X es contráctil relativo al punto x .

Habíamos visto anteriormente que una función continua $f : S^n \rightarrow X$ se podía extender al disco si y sólo si f era null homotópica. Ampliamos este resultado en el siguiente teorema.

1.1.13 Teorema. Sea $f : S^n \rightarrow X$ continua y sea $s \in S^n$. Son equivalentes.

(a) f es null homotópica.

(b) f se puede extender continuamente al disco D^{n+1} .

(c) f es null homotópica relativo a s .

Demostración. La implicación (a) \Rightarrow (b) es caso particular de 1.1.5 y (c) \Rightarrow (a) es clara. Sólo debemos verificar (b) \Rightarrow (c).

Supongamos entonces que f se extiende a una función $\tilde{f} : D^{n+1} \rightarrow X$. Definimos entonces una homotopía $H : S^n \times I \rightarrow X$ como

$$H(x, t) = \tilde{f}(tx + (1-t)s)$$

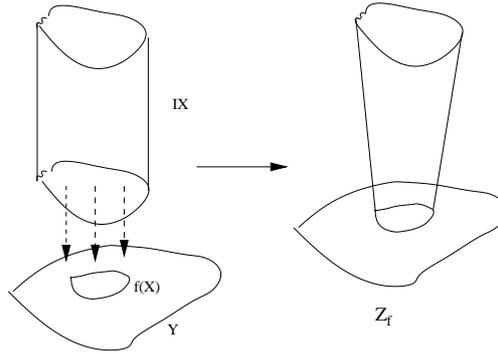
Es fácil comprobar que H está bien definida, es continua y cumple lo pedido. \square

1.1.14 Corolario. Si X es contráctil, toda función continua $f : S^n \rightarrow X$ se extiende continuamente a D^{n+1} .

Dada una función continua $f : X \rightarrow Y$ definimos el *cilindro de f* como el espacio Z_f que se obtiene tomando la unión disjunta del cilindro de X , IX , con el espacio Y y luego identificando los puntos $(x, 0) \in IX$ con los puntos $f(x) \in Y$. Es decir,

$$Z_f = IX \amalg Y / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia generada por $(x, 0) \sim f(x)$.



Notar que una función continua $g : Z_f \rightarrow W$ queda determinada por un par de funciones continuas $g_1 : IX \rightarrow W$ y $g_2 : Y \rightarrow W$ tales que $g_1(x, 0) = g_2(f(x))$. Observar también que se tienen las inclusiones $i : X \rightarrow Z_f$ definida por $i(x) = (x, 1)$ y $j : Y \rightarrow Z_f$ definida por $j(y) = y$.

Dejaremos como ejercicio para el lector la demostración que la inclusión $j : Y \rightarrow Z_f$ es un retracto por deformación fuerte. La inclusión $i : X \rightarrow Z_f$ también tiene una propiedad muy interesante y es la propiedad de *extensión de homotopías*. De hecho, las funciones que tienen esta propiedad se llaman cofibraciones pero no estudiaremos este fenómeno en estas notas.

Notas sobre pares topológicos

Muchas veces en topología algebraica se necesita trabajar con pares topológicos (veremos esto en la próxima sección y en los próximos capítulos).

Un par topológico (X, A) consiste en un espacio topológico X y un subespacio $A \subseteq X$. Un morfismo de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Análogamente, una homotopía entre morfismos de pares es una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(a, t) \in B \forall a \in A, t \in I$.

Tomando $A = \emptyset$ podemos identificar a un espacio X con el par (X, \emptyset) y si $x \in X$ podemos identificar al espacio punteado (X, x) con el par $(X, \{x\})$.

1.1.15 Definición. Un par (X, A) se dice *bueno* si X es Hausdorff, $A \subseteq X$ es cerrado y existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq U$ y la inclusión $i : A \rightarrow U$ es retracts por deformación fuerte.

Por ejemplo el par (D^n, S^{n-1}) es un par bueno tomando $U = D^n - \{0\}$. Ampliaremos este tema en la próxima sección.

Ejercicios Sección 1.1

- (a) Probar la proposición 1.1.5.
- (b) Sean X y Z espacios contráctiles. Probar que tienen el mismo tipo homotópico y que cualquier función continua entre ellos es una equivalencia homotópica.
- (c) Probar que la inmersión $i : D^n \rightarrow D^{n+1}$ definida por $i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$ es un retracts por deformación fuerte.
- (d) Probar que la inclusión de S^{n-1} como el ecuador de S^n , se puede extender a las inmersiones $i^-, i^+ : D^n \rightarrow S^n$ del disco en el hemisferio sur (resp. norte) de la esfera. Más aún, i^- e i^+ son homotópicas pero no son homotópicas relativas a S^{n-1} .
- (e) Probar que un espacio X es contráctil si y sólo si es retracts de su cono (es decir, existe $r : CX \rightarrow X$ tal que $ri = 1_X$).
- (f) Sea $A \subseteq X$ subespacio y supongamos existe una función continua $H : X \times I \rightarrow X$ tal que
 1. $H(x, 0) = x \forall x \in X$
 2. $H(A \times I) \subseteq A$
 3. $H(a, 1) = a_0 \forall a \in A$

Probar que la función cociente $q : X \rightarrow X/A$ es una equivalencia homotópica.

- (g) Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Se define el cono de f como el espacio C_f que se obtiene pegando el cono de X con el espacio Y e identificando los puntos $(x, 1)$ del cono de X con los puntos $f(x)$ de Y . Notar que se tiene una inclusión $i : Y \rightarrow C_f$. Dada una función continua $g : Y \rightarrow W$, probar que $gf : X \rightarrow W$ es nullhomotópica si y sólo si g se puede extender continuamente de Y a C_f .
- (h) Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y sea Z_f el cilindro de f . Probar que la inclusión $j : Y \rightarrow Z_f$ es un retracts por deformación fuerte.

1.2 Complejos Simpliciales y Poliedros

Ahora estudiaremos la teoría básica de los poliedros, que son espacios que se pueden describir y analizar en forma combinatoria.

Un poliedro es esencialmente un espacio topológico que admite una triangulación por un complejo simplicial. Los complejos simpliciales quedan definidos por sus vértices y símlices, donde cada n -simplex será un conjunto de $n + 1$ vértices. A cada complejo simplicial K se le asociará un espacio topológico, que llamaremos la realización geométrica de K , que se construye pegando convexos determinados por los símlices.

1.2.1 Definición. Un complejo simplicial K consiste en un conjunto de vértices V_K y un conjunto S_K cuyos elementos son subconjuntos finitos no vacíos de V_K (llamados símlices) con las siguientes propiedades:

- (a) Todo vértice de K es un simplex (es decir, S_K contiene todos los subconjuntos de un elemento de V_K).
- (b) Todo subconjunto no vacío de un simplex es un simplex (es decir, si $s \in S_K$ y $s' \subset s$ es no vacío, entonces $s' \in S_K$).

Si $s \in S_K$ tiene $n + 1$ elementos, decimos que s es un n -simplex ó, equivalentemente, que $\dim s = n$. Por lo tanto los vértices son los 0-símlices de K .

1.2.2 Ejemplos.

- (a) Si A es un conjunto no vacío cualquiera, podemos definir un complejo simplicial a partir de A tomando como vértices todos los elementos de A y como símlices todos los subconjuntos finitos y no vacíos de A .
- (b) Sea K el complejo simplicial con 3 vértices a, b, c y cuyos símlices son todos los subconjuntos no vacíos de $\{a, b, c\}$. A este complejo le asociaremos luego un *triángulo lleno*, es decir, el 2-simplex topológico (combinaciones convexas de 3 vértices afínmente independientes).
- (c) Sea K el complejo simplicial con 3 vértices a, b, c y cuyos símlices son todos los subconjuntos de $\{a, b, c\}$ salvo el conjunto $\{a, b, c\}$. A este complejo le asociaremos el borde del triángulo, es decir el borde del 2-simplex topológico.
- (d) Al complejo simplicial K con vértices $V_K = \mathbb{Z}$ y símlices

$$S_K = \{\{n\}, \{n, n + 1\}, n \in \mathbb{Z}\}$$

le asociaremos el espacio topológico \mathbb{R} .

Como los vértices de K son los 0-símlices, entonces K queda determinado por sus símlices y por abuso de notación escribiremos $s \in K$ si s es un simplex de K .

Si $s, s' \in K$ y $s' \subseteq s$ diremos que s' es una cara de s y si además $s' \neq s$ entonces es una cara propia de s .

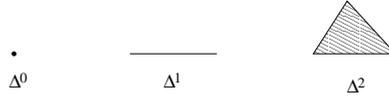
Dado un simplex s de un complejo simplicial K podemos formar un nuevo complejo simplicial \bar{s} cuyos símplices son todas las caras de s y un complejo simplicial \dot{s} cuyos símplices son todas las caras propias de s .

El n -esqueleto de un complejo simplicial K es el complejo simplicial K^n que consiste en todos los símplices de K de dimensión menor o igual a n . Por ejemplo, el 0-esqueleto es el conjunto de vértices de K .

Decimos que K tiene dimensión n si tiene n -símplices pero no tiene símplices de dimensión $n + 1$. Notar que esto implica que tampoco tiene símplices de dimensión mayor a $n + 1$. Decimos que K tiene dimensión infinita si tiene n -símplices para todo n . Un complejo simplicial K es finito si tiene finitos vértices, o equivalentemente, si tiene finitos símplices.

1.2.3 Defini n. Dado $n \geq 0$, el n -simplex topológico es el subespacio

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum t_i = 1, t_i \geq 0 \forall i\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$



Observar que todo punto $(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n$ puede ser visto como una función

$$\alpha : \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \rightarrow I$$

tal que $\sum \alpha(v_i) = 1$, donde v_0, \dots, v_n son los vértices del simplex topológico. Esto motiva la siguiente definición.

1.2.4 Defini n. Sea K complejo simplicial. Definimos el conjunto $|K|$ de funciones $\alpha : V_K \rightarrow I$ tales que

- (a) $\{v \mid \alpha(v) \neq 0\}$ es un simplex en K (en particular, el soporte de α es finito).
- (b) $\sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1$

Definimos una distancia en $|K|$ con la siguiente fórmula

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_v (\alpha(v) - \beta(v))^2}$$

Notamos $|K|_d$ a este espacio métrico.

En realidad, el espacio topológico que le asociaremos a K no es este espacio métrico sino un espacio topológico con el mismo conjunto subyacente que localmente es como $|K|_d$.

Si s es un simplex en K , definimos el conjunto $|s| \subset |K|$ como

$$|s| = \{\alpha \in |K|, \alpha(v) = 0 \forall v \notin s\}.$$

Observar que, si $\dim s = n$, entonces $|s|$ está en biyección con Δ^n porque una función α que se anula fuera de s puede ser vista como una $(n + 1)$ -upla $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$.

1.2.5 Definición. Dado un complejo simplicial K , consideramos para todo $s \in K$ el espacio métrico $|s|_d$ con la métrica definida anteriormente (con lo cual $|s|_d$ queda homeomorfo a Δ^n) y le damos al conjunto $|K|$ la topología coherente (final) respecto a todos sus símlices. Explícitamente,

$A \subset |K|$ es abierto (resp. cerrado) sii $A \cap |s|_d$ es abierto (resp. cerrado) en $|s|_d \forall s \in K$.

Notaremos con $|K|$ a este espacio topológico y lo llamaremos la realización geométrica de K .

Observar que una función $f : |K| \rightarrow X$ es continua si y sólo si las restricciones $f : |s|_d \rightarrow X$ son continuas para todo $s \in K$. En particular la identidad $1 : |K| \rightarrow |K|_d$ es continua y por lo tanto $|K|$ es un espacio Hausdorff.

1.2.6 Definición. Sea $s \in K$. Definimos el simplex abierto $\langle s \rangle \subset |K|$ como el subespacio

$$\langle s \rangle = \{\alpha \in |K|, \alpha(v) \neq 0 \text{ sii } v \in s\}$$

Observar que $\langle s \rangle$ es un abierto de $|s|_d$ (equivale a los puntos del simplex que no están en el borde) pero en general no es abierto en $|K|$.

1.2.7 Proposición.

- (a) Todo $A \subset |K|$ contiene un subespacio A' discreto que consiste en un punto exactamente por cada $\langle s \rangle$ que intesece a A .
- (b) Si $A \subset |K|$ es compacto, entonces interseca finitos $\langle s \rangle$. En particular, $|K|$ es compacto si y sólo si K es finito.

La demostración de este resultado queda como ejercicio interesante para el lector.

1.2.8 Definición. Una triangulación de un espacio X es un par (K, f) con K complejo simplicial y $f : |K| \rightarrow X$ un homeomorfismo. Un poliedro es un espacio X que admite alguna triangulación.

Observar que un poliedro puede admitir varias triangulaciones diferentes.

Las esferas, los discos, el toro, \mathbb{R}^n y los espacios proyectivos son ejemplos de poliedros. Como ejercicio para el lector queda encontrarles diferentes triangulaciones a estos espacios.

1.2.9 Observación. Si v es un vértice de K , definimos la característica de v como la función $v : V_K \rightarrow I$

$$v(v') = \begin{cases} 0 & v' \neq v \\ 1 & v' = v \end{cases}$$

De esta manera podemos identificar los vértices de K con los puntos correspondientes en el espacio $|K|$. Por ejemplo, si K está compuesto por los símlices $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ su realización es

$$\overline{0 \quad 1}$$

Notar además que toda $\alpha \in |K|$ se escribe como

$$\alpha = \sum_{v \in V_K} \alpha(v).v$$

y por lo tanto todo elemento del espacio $|K|$ se puede escribir en forma única como combinación convexa de finitos vértices de K (con la condición que las coordenadas $\alpha(v)$ sean no nulas).

1.2.10 Definición. Un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ entre complejos simpliciales es una función (de conjuntos) $f : V_K \rightarrow V_L$ tal que $f(s)$ es un simplex de L si s es simplex de K .

Un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ induce una función continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$ definida por

$$|f|(\alpha)(v') = \sum_{f(v)=v'} \alpha(v)$$

Notar que si escribimos a $\alpha \in |K|$ como una combinación convexa $\alpha = \sum \alpha(v).v$, entonces $|f|(\alpha) = \sum \alpha(v).f(v)$. Por lo tanto $|f|$ es lineal en cada simplex $|s|$, en particular $|f|$ es continua.

1.2.11 Ejemplo. Si K es un 2-simplex con vértices a, b, c y L es un 1-simplex con vértices $0, 1$, entonces la función $f : V_K \rightarrow V_L$ definida por $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) = 1$ define un morfismo simplicial de K a L y su realización $|f| : |K| = \Delta^2 \rightarrow |L| = \Delta^1$ es la función $f(t_0, t_1, t_2) = (t_0 + t_1, t_2)$.

Un subcomplejo $L \subset K$ es un complejo simplicial cuyos vértices y símplices son subconjuntos de los vértices y símplices de K (y por lo tanto la inclusión es un morfismo simplicial).

El subcomplejo $L \subset K$ se dice *pleno* si todo simplex de K cuyos vértices están en L es un simplex de L . Por ejemplo, el borde de un triángulo lleno (2-simplex) no es pleno (los 3 vértices están en L pero todo el 2-simplex no está en L). En cambio, cada vértice y cada lado es un subcomplejo pleno de K .

Subdivisión Baricéntrica y Aproximación Simplicial

1.2.12 Definición. Sea $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ un n -simplex de K . Definimos el baricentro de s como el punto $b(s) \in |K|$ dado por

$$b(s) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i.$$

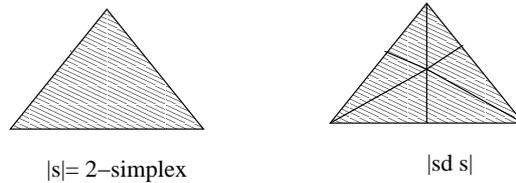
Observar que $b(s) \in \langle s \rangle$.

Por ejemplo, el baricentro de un 0-simplex $s = \{v\}$ es $b(s) = v \in |K|$ y el baricentro de un 1-simplex $s = \{v_0, v_1\}$ es el punto medio del segmento que une v_0 con v_1 en $|K|$.

1.2.13 Definición. Dado un complejo simplicial K , definimos su subdivisión baricéntrica como el complejo simplicial $sd K$ cuyos vértices son todos los baricentros de los símplexes de K y los símplexes son todos los conjuntos ordenados finitos $\{b(s_0), \dots, b(s_n)\}$ con s_i cara propia de s_{i+1} para todo i .

Notar que los vértices de $sd K$ son puntos de $|K|$ y que si s' es un simplex de la subdivisión, entonces existe un simplex s de K tal que $s' \subset |s|$.

La función lineal $|sd K| \rightarrow |K|$ inducida por la identidad en los vértices es un homeomorfismo y de esta forma identificamos la realización geométrica de la subdivisión con la realización geométrica de K .



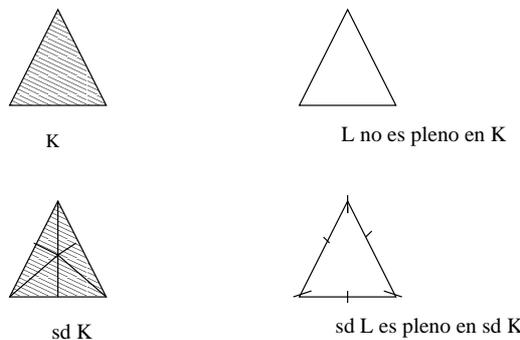
Inductivamente podemos definir

$$\begin{cases} sd^0(K) = K \\ sd^{n+1}(K) = sd(sd^n K) \end{cases}$$

E identificamos todos los espacios $|sd^n K| = |K|$.

Como ejercicio fácil para el lector queda la demostración del siguiente resultado.

1.2.14 Lema. Si $L \subset K$ es un subcomplejo, entonces $sd L \subset sd K$ es un subcomplejo pleno.



Un par poliédrico (X, A) es un par topológico que admite triangulación por un complejo simplicial K y un subcomplejo $L \subset K$ respectivamente. Por ejemplo, (D^n, S^{n-1}) es un par poliédrico tomando $(K, L) = (s, \dot{s})$ con s un n -simplex.

Recordemos que un par bueno (X, A) es un par topológico Hausdorff con $A \subset X$ cerrado y con la propiedad que existe un abierto $A \subset U \subset X$ tal que la inclusión de A en U es un retracts por deformación fuerte.

1.2.15 Proposición. Todo par poliédrico (X, A) es un par bueno.

Demostración. Sean $L \subset K$ tales que $X = |K|$ y $A = |L|$.

Por el lema previo, cambiando $L \subset K$ por $sd L \subset sd K$, podemos suponer que L es pleno en K .

Sea $N \subset K$ el máximo subcomplejo disjunto con L . Explícitamente, $V_N = V_K - V_L$ y $S_N = \{s \in S_K, \text{ los vértices de } s \text{ están en } N\}$.

Notar que N también resulta pleno por construcción y que todo simplex $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ de K cumple una de estas tres cosas:

- (a) $s \in S_L$ ó
- (b) $s \in S_N$ ó
- (c) Existe $0 \leq p \leq n$ tal que $\{v_0, \dots, v_p\}$ es simplex en L y $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ es simplex en N .

Tomamos $U = |K| - |N|$ que es abierto en $|K| = X$. Es claro que $A = |L| \subset U$. Definimos una retracción $r : U \rightarrow A$ de la siguiente manera:

Sea $\alpha \in U$. Si $\alpha \in A$, entonces $r(\alpha) = \alpha$. Si $\alpha \notin A = |L|$, entonces $\alpha = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot v_i$ con $\{v_0, \dots, v_n\}$ simplex en K . En este caso, como α no está en $|N|$ ni en $|L|$, entonces existe un $0 \leq p \leq n$ tal que $\{v_0, \dots, v_p\}$ es simplex en L y $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ es simplex en N .

Tomamos $a = \sum_{i=0}^p \alpha_i$. Observar que $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Definimos $\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{a}$ para $i = 0, \dots, p$ y $\alpha''_i = \frac{\alpha_i}{1-a}$ para $i = p+1, \dots, n$ y por lo tanto se tiene

$$\alpha = a\alpha' + (1-a)\alpha''$$

con $\alpha' = \sum_{i=0}^p \alpha'_i v_i \in |L|$ y $\alpha'' = \sum_{i=p+1}^n \alpha''_i v_i \in |N|$.

Y entonces podemos definir $r(\alpha) = \alpha'$ si $\alpha \notin |L|$. De esta forma la función $r : U \rightarrow A$ está bien definida, resulta continua y es retracción.

Además $1_U \simeq ir$ via la homotopía

$$H(\alpha, t) = \begin{cases} \alpha & \alpha \in |L| \\ t\alpha' + (1-t)\alpha & \alpha \notin |L|. \end{cases}$$

□

Vimos que todo simplex $|s| \subset |K|$ se identifica con un convexo de \mathbb{R}^n y por lo tanto hereda la métrica usual de \mathbb{R}^n que llamaremos métrica lineal en s . De esta forma, decimos que $|K|$ tiene una métrica lineal si cada simplex s la tiene.

Dado un complejo simplicial K y una métrica lineal en $|K|$, definimos

$$diam(s) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in s\}$$

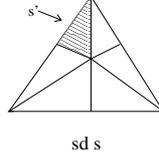
Es fácil ver que, si $s = \{v_0, \dots, v_n\}$, entonces

$$diam(s) = \max_{i,j} \|v_i - v_j\|$$

Definimos también

$$mesh(K) = \sup_{s \in K} \{diam(s)\}$$

Supongamos que s es un simplex de K y lo consideramos como un complejo simplicial \bar{s} . Tomamos un simplex $s' \in sd(\bar{s})$ y queremos comparar el diámetro de s' con el de s .



El siguiente resultado, cuya demostración puede leerse en el libro de Spanier [5], relaciona ambos diámetros:

1.2.16 Lema. *Si s es un m -simplex y s' es un simplex de $sd(\bar{s})$ entonces*

$$\text{diam}(s') \leq \frac{m}{m+1} \text{diam}(s)$$

Como consecuencias inmediatas de este lema obtenemos los siguientes resultados.

1.2.17 Corolario. *Si K es complejo simplicial m -dimensional, entonces*

$$\text{mesh}(sd K) \leq \frac{m}{m+1} \text{mesh}(K)$$

1.2.18 Corolario. *Si K es finito, para todo $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\text{mesh}(sd^r(K)) < \varepsilon$$

Comenzaremos ahora a estudiar aproximaciones simpliciales de funciones continuas entre poliedros. Recordemos que todo morfismo simplicial $\phi : K \rightarrow L$ induce una función continua $|\phi| : |K| \rightarrow |L|$ que es lineal en cada simplex de K .

Es claro que hay muchas funciones continuas entre $|K|$ y $|L|$ que no son inducidas por morfismos simpliciales (no toda función continua $f : I \rightarrow I$ es lineal !!). Nuestro objetivo es probar que las funciones continuas entre poliedros pueden ser *aproximadas* por funciones inducidas por morfismos simpliciales (que llamaremos directamente funciones simpliciales).

1.2.19 Definición. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua. Una aproximación simplicial de f es un morfismo simplicial $\phi : K \rightarrow L$ que cumple lo siguiente:

$$\text{Si } f(\alpha) \in \langle s \rangle \Rightarrow |\phi|(\alpha) \in |s| \quad \forall s \in L, \alpha \in |K|$$

Equivalentemente, si $f(\alpha) \in |s| \Rightarrow |\phi|(\alpha) \in |s|$.

Observar que, si ϕ aproxima a f y $f(v)$ es un vértice de L para algún vértice v de K , entonces $\phi(v) = f(v)$. De esto se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

1.2.20 Lema. *Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua y sea $T \subset K$ un subcomplejo tal que $f|_{|T|}$ es simplicial. Si $\phi : K \rightarrow L$ es una aproximación simplicial de f , entonces $|\phi||_{|T|} = f|_{|T|}$.*

1.2.21 Ejemplo. Sea K el 1-simplex con vértices 0 y 1 (por lo tanto $|K| = I$). La función $f : I \rightarrow I$, $f(x) = \frac{1}{2}x$ puede ser aproximada por el morfismo simplicial identidad $1_K : K \rightarrow K$ y por el morfismo simplicial constante 0 pero no puede ser aproximada por el morfismo simplicial constante 1.

1.2.22 Proposición. Sea $\phi : K \rightarrow L$ una aproximación simplicial de $f : |K| \rightarrow |L|$. Entonces $f \simeq |\phi|$. Más aún, si $f|_{|T|} = |\phi||_{|T|}$, entonces $f \simeq |\phi|$ relativo a $|T|$.

Demostración. Tomar $H : |K| \times I \rightarrow |L|$ definida por

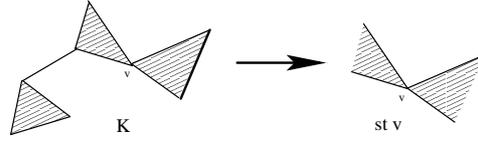
$$H(\alpha, t) = tf(\alpha) + (1-t)|\phi|(\alpha).$$

Observar que H está bien definida porque $f(\alpha)$ y $|\phi|(\alpha)$ están en el mismo convexo. \square

Para probar los teoremas de aproximaciones simpliciales, necesitamos introducir la noción de estrella de un vértice $st v$.

1.2.23 Definición. Sea v un vértice de un complejo simplicial K . La estrella de v es el subespacio

$$st v = \{\alpha \in |K|, \alpha(v) \neq 0\}.$$



Como ejercicio para el lector queda la demostración (sencilla) del siguiente resultado.

1.2.24 Lema. Sean v_0, \dots, v_n vértices de K . Entonces $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ es un simplex de K si y sólo si $\bigcap_{i=0}^n st(v_i) \neq \emptyset$.

Es claro que $st v \subset |K|$ es siempre abierto. Más aún, $\{st v\}_{v \in V_K}$ es un cubrimiento por abiertos de $|K|$. En particular, si $f : |K| \rightarrow |L|$ es continua, entonces

$$\{f^{-1}(st v)\}_{v \in V_L}$$

es un cubrimiento por abiertos de $|K|$.

1.2.25 Teorema. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ continua y $\phi : V_K \rightarrow V_L$ función de conjuntos. Entonces, ϕ es aproximación simplicial de f si y sólo si $f(st v) \subseteq st(\phi(v))$ para todo $v \in V_K$.

Demostración. Supongamos primero que ϕ es aproximación simplicial de f y veamos que $f(st v) \subseteq st(\phi(v))$ para todo $v \in V_K$.

Sea v vértice de K . Tomamos $\alpha \in st v$, entonces $\alpha(v) \neq 0$. Sea s simplex en K tal que $\alpha \in \langle s \rangle$ y sea s' simplex en L tal que $f(\alpha) \in \langle s' \rangle$.

Como ϕ aproxima a f , entonces $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. Por otro lado, como $|\phi|$ es lineal en cada simplex, entonces

$$|\phi|(\alpha)(\phi(v)) = \sum_{\phi(v')=\phi(v)} \alpha(v') \neq 0$$

y por lo tanto $\phi(v)$ es vértice de s' y como $f(\alpha) \in \langle s' \rangle$, entonces $f(\alpha) \in st(\phi(v))$ (la coordenada del punto $f(\alpha)$ correspondiente al vértice $\phi(v)$ es no nula).

Con esto probamos que $f(st v) \subseteq st(\phi(v))$.

Veamos ahora la otra implicación. Primero debemos probar que la función de conjuntos ϕ es un morfismo simplicial.

Si $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ es un simplex en K , entonces por el lema anterior, $\bigcap st(v_i) \neq \emptyset$ y por lo tanto

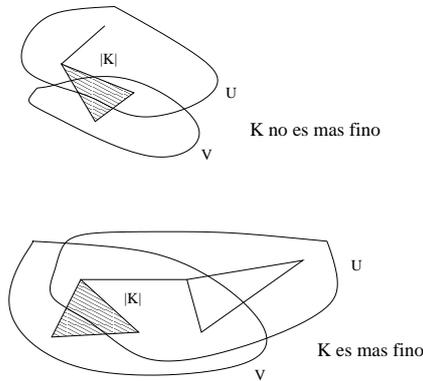
$$\emptyset \neq f\left(\bigcap st(v_i)\right) \subset \bigcap f(st(v_i)) \subset \bigcap st(\phi(v_i))$$

y nuevamente por el lema anterior, se deduce que $\{\phi(v_0), \dots, \phi(v_n)\}$ es simplex en L . Esto prueba que ϕ es simplicial.

Veamos ahora que ϕ aproxima a f .

Sea $\alpha \in |K|$ y supongamos que $f(\alpha) \in \langle s' \rangle$. Debemos ver que $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. Sea s simplex de K tal que $\alpha \in \langle s \rangle$. Para todo vértice v de s , se tiene que $\alpha(v) \neq 0$ y por lo tanto $\alpha \in st v$. Como $f(st v) \subset st(\phi(v))$, se tiene que $f(\alpha)(\phi(v)) \neq 0$ y por lo tanto $\phi(v)$ es vértice de s' . Esto prueba que ϕ manda los vértices de s en vértices de s' y como ϕ es simplicial entonces $|\phi|(\alpha) \in |s'|$. \square

1.2.26 Definición. Sea K complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento por abiertos de $|K|$. Decimos que K es más fino que \mathcal{U} si para todo vértice v de K existe un abierto U_i del cubrimiento tal que $st v \subset U_i$.



1.2.27 Teorema. Una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ admite una aproximación simplicial $\phi : K \rightarrow L$ si y sólo si K es más fino que el cubrimiento $\{f^{-1}(st v)\}_{v \in V_L}$.

Demostración. La demostración se deduce inmediatamente del teorema anterior. \square

Supongamos que $K' = sd^m K$ para algún m . Como corolario inmediato del teorema 1.2.25 vemos que una función

$$\phi : V_{K'} \rightarrow V_K$$

es una aproximación simplicial de la identidad $1 : |K'| \rightarrow |K|$ si y sólo si $v \in st(\phi(v))$ para todo vértice v de K' . Observemos entonces también que siempre podremos encontrar aproximaciones simpliciales de la identidad $1 : |K'| \rightarrow |K|$.

Ahora juntemos varios resultados que ya conocemos para probar la existencia de aproximaciones simpliciales.

Si K es un complejo simplicial finito, sabemos que $|K|$ es compacto. Por lo tanto todo cubrimiento por abiertos admite subcubrimiento finito. También sabemos que si subdividimos K las veces necesarias, entonces $mesh(sd^m K)$ se hace tan chico como uno quiera y por lo tanto probamos el siguiente resultado.

1.2.28 Lema. *Si K es finito y \mathcal{U} cubrimiento por abiertos de $|K|$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $sd^m K$ es más fino que \mathcal{U} para todo $m \geq n_0$.*

Si juntamos ahora este lema con el teorema anterior probamos inmediatamente el siguiente

1.2.29 Teorema. *Si $f : |K| \rightarrow |L|$ es continua y K es finito, entonces existen aproximaciones simpliciales de f ,*

$$\phi_n : sd^n(K) \rightarrow L, \forall n \geq n_0.$$

Observar que se necesitan todas las subdivisiones para poder aproximar todas las funciones continuas $f : K \rightarrow L$. Por ejemplo, si s es el 2-simplex y tomamos $K = L = \dot{s}$ (las caras propias), tenemos que $|K| = |L| = S^1$. Como el grupo fundamental de S^1 es \mathbb{Z} entonces hay infinitas clases homotópicas de funciones continuas $f : S^1 \rightarrow S^1$. Pero por otra parte para todo n existen solamente finitos morfismos simpliciales $\phi : sd^n(\dot{s}) \rightarrow \dot{s}$.

Veamos algunas aplicaciones topológicas interesantes del teorema anterior.

1.2.30 Proposición. *Si $m < n$, toda función continua $f : S^m \rightarrow S^n$ es null homotópica (o lo que es lo mismo, se puede extender al disco D^{m+1}).*

Demostración. Consideramos $S^m = |\dot{s}|$ y $S^n = |\dot{s}'|$ con s un $m + 1$ -simplex y s' un $n + 1$ -simplex.

Por el teorema anterior sabemos que existe aproximación simplicial

$$\phi : sd^r \dot{s} \rightarrow \dot{s}'$$

Como $f \simeq |\phi|$, basta ver que $|\phi|$ es null homotópica.

Ahora bien, como la dimensión de $sd^r(\dot{s})$ es m y $m < n$, entonces existe un simplex en \dot{s}' que no es imagen de ningún simplex de $sd^r(\dot{s})$ y por lo tanto existe un $\alpha \in |\dot{s}'|$ tal que $\alpha \notin Im(|\phi|)$.

Por lo tanto $|\phi|$ no es sobreyectiva y se tiene

$$|\phi| : S^m \rightarrow S^n - \{\alpha\} \simeq \mathbb{R}^n$$

y como \mathbb{R}^n es contráctil, vale que $|\phi|$ es null homotópica. □

Otra forma de enunciar la proposición anterior es diciendo que S^n es $n - 1$ -conexo (pero este tema escapa a los contenidos de este curso). Tomando $m = 1$ se tiene el siguiente corolario:

1.2.31 Corolario. *S^n es simplemente conexo para todo $n \geq 2$.*

Consideremos el revestimiento universal

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1.$$

Como S^n es simplemente conexo para todo $n \geq 2$, por una propiedad básica de revestimientos se tiene que toda función continua $f : S^n \rightarrow S^1$ se levanta a una función $\tilde{f} : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ y como \mathbb{R} es contráctil se deduce el siguiente corolario:

1.2.32 Corolario. *Dado $n \geq 2$, toda función continua $f : S^n \rightarrow S^1$ es null homotópica.*

Este corolario también se podría enunciar diciendo que $\pi_n(S^1) = 0 \forall n \geq 2$, pero nuevamente aclaramos que este tema escapa a los contenidos de este curso.

Ejercicios Sección 1.2

- (a) Probar la proposición 1.2.7 y los lemas 1.2.14 y 1.2.24.
- (b) Describir distintas triangulaciones para las esferas, discos, toro y para \mathbb{R}^n .
- (c) Sea X un conjunto y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una colección de subconjuntos de X . El *nervio* de \mathcal{U} es el complejo simplicial $K(\mathcal{U})$ cuyos símlices son los subconjuntos finitos no vacíos de \mathcal{U} , $s = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{i_k} \neq \emptyset$.
1. Probar que efectivamente $K(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial.
 2. Sea K complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{st v | v \in K\}$ cubrimiento abierto de $|K|$. Probar que la función que le asigna a cada vértice v de K el abierto $st v$ de $|K|$ induce un isomorfismo simplicial $K = K(\mathcal{U})$.
- (d) Sea \mathcal{U} un cubrimiento por abiertos de un espacio topológico X y sea $K(\mathcal{U})$ su nervio. Una función continua $f : X \rightarrow |K(\mathcal{U})|$ se dice canónica si $f^{-1}(st U) \subset U$ para todo U del cubrimiento \mathcal{U} . Probar que:
1. Si \mathcal{U} es un cubrimiento localmente finito de X , existe una biyección entre las funciones canónicas $X \rightarrow |K(\mathcal{U})|$ y las particiones de la unidad subordinadas a \mathcal{U} .
 2. Si \mathcal{U} es cubrimiento localmente finito de X , entonces todas las funciones canónicas $X \rightarrow |K(\mathcal{U})|$ son homotópicas.
- (e) Un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y $\dim X \not\leq n-1$. Probar que:
1. Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $\dim A \leq \dim X$.
 2. Si K complejo simplicial finito y $\dim K \leq n$ entonces $\dim |K| \leq n$.
 3. Si s es un n -simplex, entonces $\dim |s| = n$.

4. Si X es espacio paracompacto y $\dim X \leq n$, entonces toda función continua $f : X \rightarrow S^m$ es nullhomotópica para $m > n$.
- (f) Sea X un espacio métrico compacto y sea C el espacio de funciones continuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ con la métrica:

$$d(f, g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\| \mid x \in X\}$$

Probar que:

1. C es espacio métrico completo.
2. Para todo $m \in \mathbb{N}$, el subconjunto

$$C_m = \{f \in C \mid \text{diam}(f^{-1}(z)) < \frac{1}{m} \forall z \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$$

es abierto en C .

3. $\bigcap C_m$ es el conjunto de homeomorfismos de X en \mathbb{R}^{2n+1} .
 4. Si $\dim X \leq n$, entonces C_m es denso en C para todo m . Deducir que, en este caso, X puede ser inmerso en \mathbb{R}^{2n+1} .
- (g) Sea X un espacio n -conexo, es decir que toda $f : S^m \rightarrow X$ continua es nullhomotópica para todo $m \leq n$. Sea K complejo simplicial y K^n su n -esqueleto. Probar que toda función continua $g : |K| \rightarrow X$ es homotópica a alguna que manda todo K^n a un punto.
- (h) Probar que un poliedro es contráctil si y sólo si es n -conexo para todo n .
- (i) Una *pseudovariedad n -dimensional* es un complejo simplicial K que cumple lo siguiente:

- (I) K es homogéneamente n -dimensional, es decir, todo simplex de K es cara de algún n -simplex.
- (II) Todo $(n-1)$ -simplex de K es cara de a lo sumo dos n -símplices.
- (III) Para todo par de n -símplices s, s' , existe una sucesión finita $s = s_0, s_1, \dots, s_r = s'$ de n -símplices tales que s_i y s_{i+1} tienen una $(n-1)$ -cara en común para todo i .

El *borde* de una pseudovariedad de dimensión n es el subcomplejo \dot{K} generado por los $(n-1)$ -símplices que son caras de exactamente un n -simplex de K . Si \dot{K} es vacía decimos que K es una pseudovariedad sin borde.

Probar lo siguiente:

1. Un n -simplex s es una pseudovariedad n -dimensional y su borde (como pseudovariedad) es \dot{s} .
2. El borde de una pseudovariedad finita de dimensión 1 es vacío o tiene exactamente dos vértices.

1.3 CW-Complejos

Los CW-complejos son espacios que se construyen pegando celdas de distintas dimensiones. Adjuntar una n -celda a un espacio A es unirle una copia del disco D^n pegando el borde $\partial D^n = S^{n-1}$ a A de alguna manera.

Por ejemplo, si queremos adjuntar una n -celda a un punto $*$ debemos unirle el disco al punto pegando todo el borde a $*$ y el resultado de eso es la esfera S^n .

Definamos formalmente esto. Para todo $n \geq 0$ consideramos los discos D^n y las esferas S^{n-1} . Por convención tomamos $D^0 = *$ y $S^{-1} = \emptyset$ (que es el borde del punto).

1.3.1 Definición. Decimos que un espacio X se obtiene de un espacio A adjuntando una n -celda si se tiene un pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & A \\ i \downarrow & \text{Push} & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

donde $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ es la inclusión en el borde. Es decir, X se construye tomando la unión disjunta de A y D^n e identificando luego los puntos del borde del disco con su imagen en A . Esto se nota generalmente con

$$X = A \bigcup_{S^{n-1}} D^n.$$

La función f se denomina función de adjunción de la celda. La celda en cuestión es la imagen del disco en X y la notamos $e^n = g(D^n)$ y la función g se llama función característica de la celda.

Podemos observar varias cosas de esta definición. Primero notemos que g restringida al interior del disco es un homeo con su imagen. Denotamos $e^\circ = g(\overset{\circ}{D}^n)$ y lo llamamos el interior de la celda.

Notemos también que A resulta un subespacio de X y que la topología de X es coherente con la de A y D^n , concretamente:

$$U \subset X \text{ es abierto sii } U \cap A \text{ y } g^{-1}(U) \subset D^n \text{ son abiertos}$$

En particular el interior de la celda adjuntada e° es abierto en X .

1.3.2 Ejemplos.

- (a) D^n se obtiene de S^{n-1} adjuntando una n -celda tomando como función de adjunción a la identidad $1 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.
- (b) S^n se obtiene de un punto $*$ adjuntando una n -celda.

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & * \\ i \downarrow & \text{Push} & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{q} & S^n \end{array}$$

La función característica $q : D^n \rightarrow S^n$ resulta ser la función cociente.

Se pueden adjuntar varias n -celdas a A al mismo tiempo:

1.3.3 Definición. Sea J_n un conjunto de índices (puede ser infinito, finito, vacío). Decimos que X se obtiene de A adjuntando n -celdas (indexadas por J_n) si se tiene un pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha \in J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod f_\alpha} & A \\ \coprod i \downarrow & \text{Push} & \downarrow \\ \coprod_{\alpha \in J_n} D^n & \xrightarrow{\coprod g_\alpha} & X \end{array}$$

Las n -celdas adjuntadas serán $e_\alpha^n = g_\alpha(D^n)$

Observar que, si $\alpha \neq \beta \in J_n$, entonces $e_\alpha^n \cap e_\beta^n = \emptyset$. Por lo tanto las celdas adjuntadas se pueden intersecar solamente en el borde y esa intersección cae en A .

Notar también que la topología en X es coherente con la de A y con la de todas las copias de D^n .

1.3.4 Ejemplo. S^n se obtiene de S^{n-1} adjuntando dos n -celdas que serán respectivamente el hemisferio norte y sur de la esfera (la esfera $(n-1)$ -dimensional resultará ser el ecuador de la esfera de dimensión mayor).

Notar que adjuntar una 0-celda a A es lo mismo que unirle un punto disjunto.

1.3.5 Teorema. Si A es Hausdorff y X se obtiene de A adjuntando n -celdas, entonces X resulta Hausdorff.

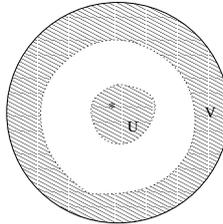
Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Debemos encontrar abiertos disjuntos $U, V \subset X$ que los contengan respectivamente.

Consideramos varios casos:

Si $x \in e_\alpha^n$, $y \in e_\beta^n$ con $\alpha \neq \beta$, entonces podemos tomar $U = e_\alpha^n$ y $V = e_\beta^n$.

Si $x, y \in e_\alpha^n$, podremos encontrar los abiertos $U, V \subset e_\alpha^n$ porque es homeomorfo a $\overset{\circ}{D}^n$, que es Hausdorff.

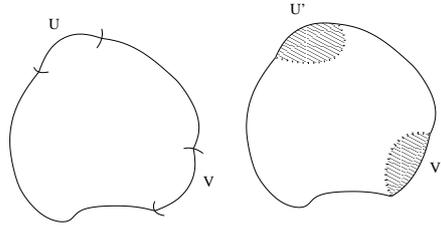
Si $x \in e_\alpha^n$, $y \in A$, consideramos el punto $g_\alpha^{-1}(x) \in \overset{\circ}{D}^n$ y tomamos abiertos U, V de D^n disjuntos tales que $g_\alpha^{-1}(x) \in U$ y $\partial D^n = S^{n-1} \subset V$.



Luego los abiertos $\tilde{U} = g_\alpha(U)$ y $\tilde{V} = A \cup g_\alpha(V) \cup_{\beta \neq \alpha} e_\beta^n$ cumplen lo pedido.

El último caso a considerar es cuando $x, y \in A$. Como A es Hausdorff, podemos encontrar abiertos $U, V \subset A$ que los disjuntan. El problema es que U y V no son en general abiertos en X .

Para eso debemos *rellenarlos* a abiertos disjuntos de X .



Si $f_\alpha : S_\alpha^{n-1} \rightarrow A$ es la función de adjunción de la celda e_α^n (notamos con S_α^{n-1} a la copia de S^{n-1} indexada con α), entonces tomamos los abiertos disjuntos $f_\alpha^{-1}(U), f_\alpha^{-1}(V) \subset S_\alpha^{n-1}$ y los extendemos a abiertos disjuntos $U_\alpha, V_\alpha \subset D_\alpha^n$. Hacemos esto para todo $\alpha \in J_n$ y luego tomamos

$$U' = U \cup \left(\bigcup_{\alpha} g_\alpha(U_\alpha) \right) \quad V' = V \cup \left(\bigcup_{\alpha} g_\alpha(V_\alpha) \right)$$

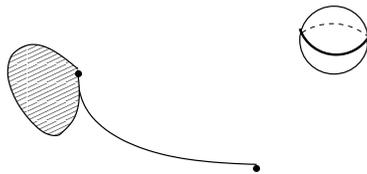
y estos abiertos disjuntos de X cumplen lo pedido. □

1.3.6 Observación. Si A es Hausdorff y X se obtiene de A adjuntando n -celdas, entonces $A \subset X$ resulta subespacio cerrado.

1.3.7 Definición. Un espacio X es un CW-complejo si existe una sucesión

$$X^{-1} = \emptyset \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq X^{n+1} \subseteq \dots \subseteq X$$

tales que X^n se obtiene de X^{n-1} adjuntando una cantidad finita, infinita o vacía de n -celdas ($n \geq 0$) y $X = \bigcup_n X^n$ con la topología coherente (es decir, $F \subset X$ cerrado si y sólo si $F \cap X^n$ es cerrado en X^n para todo n). El subespacio cerrado X^n se denomina el n -esqueleto de X .



CW complejo no conexo de dimensión 2.

Puede suceder que no se adjunten n -celdas para algún n pero sí se adjunten celdas de dimensión mayor. Pero si no se adjuntan 0-celdas entonces X resulta vacío.

Notemos también que un espacio puede tener varias estructuras diferentes como CW-complejo (ver ejemplos más abajo).

Notaremos $e_\alpha^n = g_\alpha(D^n)$ a las n -celdas (indexadas con $\alpha \in J_n$). Observar que las celdas son compactas (por ser imagen de compactos) y que

$$X = \bigcup_{n,\alpha} e_\alpha^n = \bigcup_{n,\alpha} \overset{\circ}{e}_\alpha^n.$$

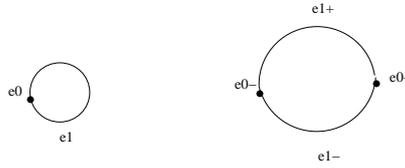
1.3.8 *Observación.* Los interiores de celdas e_α^n no son necesariamente abiertos en X .

1.3.9 Definición. Decimos que la dimensión de X es n si X tiene n -celdas pero no tiene celdas de dimensión mayor y la dimensión es infinita si tiene celdas de dimensión tan grande como se quiera.

1.3.10 Ejemplos.

(a) S^n es un CW-complejo. Veamos dos estructuras diferentes:

- 1 0-celda (comienzo con un punto) y 1 n -celda. Es decir, el m -esqueleto es un punto para todo $m < n$ y el n -esqueleto es todo S^n .



Dos estructuras diferentes para la circunferencia

- 2 m -celdas para todo $m \leq n$. Es decir

$$S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \dots \subset S^n$$

donde $S^m \subset S^{m+1}$ en el ecuador y las dos celdas adjuntadas corresponden a los hemisferios norte y sur.

- D^n es un CW-complejo, tomando como $(n-1)$ -esqueleto a S^{n-1} y luego adjuntándole una n -celda via la identidad.
- En general, los poliedros son CW-complejos con estructura celular inducida por la estructura simplicial.
- El toro es un CW-complejo con 1 0-celda (un punto), 2 1-celdas (X^1 es una union en un punto de dos copias de S^1) y una 2-celda.
- Sea \mathbb{R}^∞ el conjunto de sucesiones de números reales donde casi todos son cero con la topología débil y sea

$$S^\infty = \{x \in \mathbb{R}^\infty, \|x\| = 1\}$$

la esfera infinita. Este espacio es un CW-complejo con 2 n -celdas para cada $n \in \mathbb{N}$. Específicamente, se tiene

$$S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \dots \subset S^n \subset \dots \subset S^\infty$$

donde cada n -esfera se ve como ecuador de la $(n+1)$ -esfera.

- (f) El plano proyectivo real P^n es un CW-complejo con una m -celda para cada $m \leq n$.
Se tiene:

$$P^0 \subset P^1 \subset \dots \subset P^n$$

- (g) El plano proyectivo real infinito P^∞ es un CW con una m -celda para todo m natural.

La demostración del siguiente resultado queda como ejercicio.

1.3.11 Proposición. *Sea X un CW-complejo. Todo compacto $K \subset X$ interseca sólo un número finito de interiores de celdas. En particular, X es compacto si y sólo si es finito (tiene finitas celdas).*

1.3.12 Teorema. *Sea X un CW-complejo y sea $\{e_\alpha^n\}_{n,\alpha}$ el conjunto de celdas de X . Entonces*

- (a) $e_\alpha^n \cap e_\beta^m \neq \emptyset$ si y sólo si $n = m, \alpha = \beta$.
 (b) Toda celda e_α^n interseca sólo un número finito de interiores de otras celdas.
 (c) X es Hausdorff.
 (d) $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap e_\alpha^n$ es cerrado en e_α^n para todo n, α .

Demostración. Las demostraciones de todos los items, salvo el item (c), se deducen claramente de todo lo visto hasta ahora. Por ejemplo, para probar el item (b) usamos que las celdas son compactas y los compactos intersecan finitos interiores de celdas.

Probaremos por lo tanto el item (c) (que X es Hausdorff).

Sea X^n el n -esqueleto de X . Como X^0 es un espacio discreto, entonces X^0 es Hausdorff y por el teorema 1.3.5, resulta que X^1 también lo es. Por inducción, resulta claramente que X^n es Hausdorff para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$ y sea n suficientemente grande tal que $x, y \in X^n$. Como X^n es Hausdorff, entonces existen abiertos disjuntos $U_n, V_n \subset X^n$ que los contienen respectivamente. El problema es que U_n y V_n pueden no ser abiertos en X .

Pero utilizando la misma técnica que en la demostración de 1.3.5, podemos ir construyendo inductivamente $U_m, V_m \subset X^m$ abiertos disjuntos de X^m para todo $m \geq n$ tales que

$$U_m \cap X^{m-1} = U_{m-1} \quad V_m \cap X^{m-1} = V_{m-1}$$

Luego sólo resta tomar

$$U = \bigcup_{m \geq n} U_m \quad V = \bigcup_{m \geq n} V_m$$

que resultan claramente abiertos disjuntos en X y contienen a x e y respectivamente. \square

1.3.13 Definición. Decimos que un par (X, A) es un CW-complejo relativo si se tiene una sucesión

$$A = X_A^{-1} \subset X_A^0 \subset X_A^1 \subset \dots \subset X_A^n \subset \dots \subset X$$

donde X_A^n se obtiene de X_A^{n-1} adjuntando n -celdas y $X = \bigcup X_A^n$ con la topología inducida.

Por ejemplo, si X es un CW-complejo, entonces (X, X^n) y (X^{n+k}, X^n) son CW-relativos.

Observar que un CW-complejo X es lo mismo que un CW-relativo (X, \emptyset) .

Ejercicios Sección 1.3

- (a) Describir estructuras celulares para la esfera n -dimensional, los discos n -dimensionales y el toro.
- (b) Comprobar que los poliedros son CW-complejos con estructura celular inducida por la estructura simplicial.
- (c) Sea X un CW-complejo, Y un espacio topológico y $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que son equivalentes:
1. $f : X \rightarrow Y$ es continua.
 2. La restricción $f : e_\alpha^n \rightarrow Y$ es continua para toda celda.
 3. $f \circ f_\alpha : D^n \rightarrow Y$ es continua para toda celda, donde $f_\alpha : D^n \rightarrow e_\alpha^n$ es la función característica de la celda.
- (d) Sea X un CW-complejo. Probar que $H : X \times I \rightarrow Y$ es continua si y sólo si todas las restricciones $H : e_\alpha^n \times I \rightarrow Y$ lo son.
- (e) Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera del espacio vectorial \mathbb{R}^n . Probar que la base define una estructura de CW-complejo en \mathbb{R}^n tomando como k -esqueleto al conjunto

$$(\mathbb{R}^n)^k = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i v_i \mid s_i \in \mathbb{R} \text{ y } s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n - k \text{ índices } i \right\}$$

- (f) Probar que si X e Y son CW-complejos e Y es localmente compacto entonces $X \times Y$ es un CW-complejo. En particular, si X es un CW-complejo entonces $X \times I$ también lo es. Describir la estructura celular de $X \times I$ en función de la estructura celular de X .
- (g) Sea (X, A) un CW-complejo relativo. Probar que X/A es un CW-complejo.

Capítulo 2

Homología

La teoría de homología es de fundamental importancia en topología algebraica. Una teoría de homología involucra una sucesión de funtores H_n a la categoría de grupos abelianos, que miden la cantidad de ‘agujeros’ n -dimensionales.

Estudiaremos la teoría de homología singular para espacios topológicos y la teoría de homología simplicial para complejos simpliciales. Ambas homologías están relacionadas por un resultado fundamental que dice que la homología singular de un poliedro es isomorfa a la homología simplicial de cualquier complejo simplicial que lo triangula.

A diferencia de los grupos de homotopía de un espacio, que son fáciles de definir y difíciles de calcular, los grupos de homología son un poco complicados para definir pero se pueden calcular mucho más fácilmente que los de homotopía. Esto se debe a la existencia de resultados muy fuertes, como la *sucesión de Mayer-Vietoris* y el *teorema de escisión* que permiten el cálculo de estos grupos. En la teoría de homotopía no hay este tipo de resultados tan fuertes y por eso los grupos de homotopía de espacios relativamente simples como las esferas son bastante complicados de calcular. Una explicación geométrica para esto es que los n -símplices Δ^n (utilizados para la definición de homología) pueden subdividirse mientras que las esferas S^n (utilizadas para la definición de los grupos de homotopía) no.

En la primera sección estudiaremos los fundamentos algebraicos básicos para poder definir y calcular los grupos de homología. En la segunda sección nos dedicaremos a la homología simplicial y en la última sección estudiaremos la homología singular de espacios y su relación con la homología simplicial.

2.1 Sucesiones Exactas, Complejos y Homología

Comencemos con un poco de álgebra. Trabajaremos con grupos abelianos y notaremos con 0 al grupo cero y también al morfismo cero. Indicaremos con $0 \rightarrow M$ y $M \rightarrow 0$ a los únicos morfismos que salen o llegan al grupo 0 .

2.1.1 Definición. Un diagrama de grupos abelianos

$$G \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} T$$

es exacto en M si $\text{Im } f = \ker g$.

Notar que, en particular, $gf = 0$. Más aún, la exactitud en M equivale a pedir que $\text{Im } f \subset \ker g$ (i.e. $gf = 0$) y además $\ker g / \text{Im } f = 0$.

2.1.2 Definición. Una sucesión exacta es un diagrama de grupos abelianos y morfismos de grupos

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

que es exacta en todo lugar n (el diagrama puede ser finito o infinito indexado por \mathbb{Z} , \mathbb{N} , etc).

Observar que $0 \rightarrow G \xrightarrow{f} H \rightarrow 0$ es exacto si y sólo si f es un isomorfismo.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

se denomina una sucesión exacta corta (que abreviaremos con la sigla sec). Notar que esto equivale a decir que f es mono, g es epi y $\ker g = \text{Im } f$.

2.1.3 Ejemplos.

- (a) $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} M \oplus P \xrightarrow{q} P \rightarrow 0$ es una sec, donde i es la inclusión en la primer coordenada y q la proyección de la segunda coordenada.
- (b) $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{q} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ es una sec, donde f es multiplicar por 2 y q le asigna la clase módulo 2. Notar que esta sec no es de la forma de las sec del primer item.
- (c) Si T es un subgrupo de un grupo abeliano G , entonces la inclusión induce una sec

$$0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow G/T \rightarrow 0$$

La siguiente proposición no es difícil de probar y su demostración queda como ejercicio.

2.1.4 Proposición. Sea $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ una sec. Son equivalentes:

- (a) f es sección (es decir, existe $r : N \rightarrow M$ tal que $rf = 1_M$).
- (b) g es retracción (es decir, existe $i : P \rightarrow N$ tal que $gi = 1_P$).
- (c) Existe un isomorfismo $\phi : N \rightarrow M \oplus P$ tal que $\phi f(m) = (m, 0)$ y $g\phi^{-1}(m, p) = p$.

Decimos que una sec se parte si cumple las propiedades de la proposición anterior.

2.1.5 Definición. Un complejo de cadenas (C_*, d) es un diagrama de grupos abelianos y morfismos de grupos

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

tal que $d_n d_{n+1} = 0 \forall n$ (equivalentemente, $\text{Im } d_{n+1} \subset \ker d_n$).

Al morfismo d_n se lo denomina morfismo de borde o diferencial. En general se omite los subíndices (cuando esto no lleve a confusión) y, por ejemplo, escribimos $d^2 = 0$ en lugar de $d_n d_{n+1} = 0$.

Como $\text{Im } d_{n+1} \subset \ker d_n$, tiene sentido calcular el cociente $\ker d_n / \text{Im } d_{n+1}$ y esto será la homología del complejo en grado n . Concretamente:

2.1.6 Definición. Sea (C_*, d) un complejo de cadenas. Definimos la homología de (C_*, d) en grado n como el grupo abeliano $H_n(C_*) = \ker d_n / \text{Im } d_{n+1}$. Usualmente se nota $Z_n(C) = \ker d_n$ y se lo llama el grupo de n -ciclos de C_* y $B_n(C) = \text{Im } d_{n+1}$ que se llama el grupo de n -bordes. Con esta notación tenemos $H_n(C_*) = Z_n(C) / B_n(C)$ es decir n -ciclos sobre n -bordes.

Notar que $H_n(C_*) = 0$ si y sólo si C_* es exacto en el lugar n . Por lo tanto una sucesión exacta se podría definir como un complejo cuya homología vale 0 en todo lugar. La homología mide que tan exacto o inexacto es un complejo.

2.1.7 Ejemplos. Veamos algunos ejemplos básicos de complejos y sus homologías.

- (a) Si $C_* = \dots \rightarrow M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{0} M \rightarrow \dots$, entonces $H_n(C_*) = M$ para todo M .
- (b) Si $C_* = \dots \rightarrow M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{1_M} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{1_M} \dots$, entonces $H_n(C_*) = 0$ para todo M , es decir es exacto.
- (c) Si $C_* = \dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots$, entonces $H_n(C_*) = 0$ para n par y $H_n(C_*) = \mathbb{Z}_m$ para n impar (ó viceversa, dependiendo de la indexación del complejo).

Un morfismo de complejos $f : (C_*, d) \rightarrow (C'_*, d')$ es una familia de morfismos de grupos $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ para todo n , que conmutan con los diferenciales (es decir, $d'f = fd$).

Observar que todo morfismo de complejos $f : (C_*, d) \rightarrow (C'_*, d')$ induce un morfismo en la homología $f_* : H_n(C_*) \rightarrow H_n(C'_*)$ para todo n . El morfismo está definido por $f_*(\bar{x}) = \overline{f(x)}$, donde \bar{x} es la clase de $x \in Z_n(C)$ en el cociente. Para verificar esto, sólo basta observar que, como f es morfismo de complejos, entonces f manda ciclos en ciclos y bordes en bordes.

Asimismo es fácil de comprobar que la asignación $f \rightarrow f_*$ es funtorial, es decir, $1_* = 1$ y $(fg)_* = f_*g_*$. Por lo tanto, si f es un isomorfismo de complejos, entonces f_* es un isomorfismo entre los grupos de homología.

Por supuesto existen morfismos de complejos que no son isomorfismos pero que inducen isomorfismos a nivel de sus homologías. Por ejemplo, el morfismo nulo entre sucesiones exactas distintas induce un isomorfismo a nivel homología (valen cero) pero no es un isomorfismo a nivel complejos.

2.1.8 Definición. $f : (C_*, d) \rightarrow (C'_*, d')$ es un quasi-isomorfismo si $f_* : H_n(C_*) \rightarrow H_n(C'_*)$ es un isomorfismo para todo n .

En la sección 2.3 estudiaremos la teoría de homología singular de espacios topológicos. Veremos que a cada espacio X se le asigna un complejo, llamado complejo singular de X , y la homología de ese complejo es la homología singular de X . Las funciones continuas entre

espacios inducirán obviamente morfismos entre los complejos singulares. Pero también veremos que las homotopías juegan un papel importante aquí. Veremos que las homotopías de funciones continuas inducen homotopías a nivel complejos y dos morfismos homotópicos de complejos inducen el mismo morfismo en las homologías (por eso, dos espacios que tienen el mismo tipo homotópico, tienen los mismos grupos de homología).

Definamos entonces el concepto de homotopía de morfismos de complejos.

2.1.9 Definición. Sean $f, g : (C_*, d) \rightarrow (C'_*, d')$ morfismos de complejos. Una homotopía $\phi : f \simeq g$ es una familia de morfismos $\phi_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ para todo n tales que

$$d'_{n+1}\phi_n + \phi_{n-1}d_n = f_n - g_n.$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d} & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \longrightarrow & & \\ & g \downarrow & & \downarrow f & \swarrow \phi & g \downarrow & & \downarrow f & \\ & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'} & C'_n & \xrightarrow{d'} & C'_{n-1} & \longrightarrow & & \end{array}$$

Dejamos como ejercicio al lector probar que \simeq es una relación de equivalencia.

2.1.10 Proposición. Sean $f, g : (C_*, d) \rightarrow (C'_*, d')$. Si $f \simeq g$, entonces

$$f_* = g_* : H_n(C_*) \rightarrow H_n(C'_*)$$

para todo n .

Demostración. Sea $\bar{x} \in H_n(C_*)$, veamos que $f(x) - g(x)$ es un borde en C'_* .

Como $f \simeq g$, entonces existe una homotopía ϕ tal que $d'\phi + \phi d = f - g$ y como $x \in \ker d$, se tiene $f(x) - g(x) = d'(\phi(x))$. □

Un complejo se dice contráctil si es equivalente homotópico al complejo nulo. Es claro que, si (C_*, d) es contráctil, entonces es acíclico (es decir, su homología vale cero) pero la recíproca es falsa.

Ejercicios Sección 2.1

- (a) Probar la proposición 2.1.4
- (b) Hallar todos los grupos abelianos posibles M en las siguientes sucesiones exactas:

1. $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow 0$
2. $0 \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$
3. $0 \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow 0$

- (c) (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & d \downarrow & & e \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

Probar que

1. Si b y d son mono y a es epi, entonces c es mono.
2. Si b y d son epi y e es mono, entonces c es epi.
3. Concluir que si a, b, d y e son iso, entonces c es iso.

(d) (Lema de la serpiente) Probar que un diagrama de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\
 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 &
 \end{array}$$

induce una sucesión exacta

$$\ker(a) \rightarrow \ker(b) \rightarrow \ker(c) \rightarrow \operatorname{coker}(a) \rightarrow \operatorname{coker}(b) \rightarrow \operatorname{coker}(c)$$

Además, si $M_1 \rightarrow M_2$ es mono, entonces $\ker(a) \rightarrow \ker(b)$ también y si $N_2 \rightarrow N_3$ es epi, también lo es $\operatorname{coker}(b) \rightarrow \operatorname{coker}(c)$.

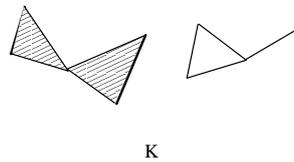
(e) Sea (C_*, d) un complejo. Probar que son equivalentes:

1. C_* es exacto.
2. C_* es acíclico.
3. $0 \rightarrow C_*$ es un quasi isomorfismo (0 denota el complejo que en cada lugar tiene el módulo 0).

(f) Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Probar que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que $H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D)$.

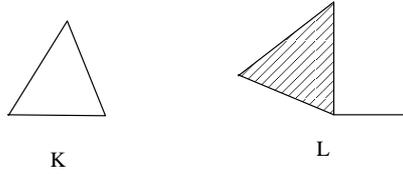
2.2 Homología Simplicial

Supongamos que tenemos un poliedro K



y queremos calcular sus componentes arco-conexas. Notemos que basta verificar qué pasa con los vértices (y de esta forma reducimos el problema a finitos puntos, si el poliedro es compacto). Además, dos vértices estarán en la misma componente si y sólo si existe un camino de aristas (1-símplices orientados) entre ellos.

Si nos dan dos poliedros

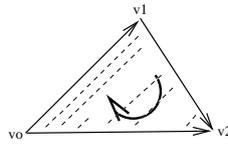


y nos preguntan si son homeomorfos, podríamos decir que no porque uno de ellos tiene un agujero (triángulo vacío) y el otro no. ¿Cómo medimos los agujeros? En este caso, tenemos un camino de aristas (un 1-ciclo) en K que no es un borde. En L hay un 1-ciclo pero es también un borde (el triángulo está lleno).

Con la homología simplicial mediremos agujeros de complejos simpliciales (en realidad, de los poliedros correspondientes) y para eso queremos detectar si hay ciclos que no sean bordes.

Dado un complejo simplicial K , vamos a definir un complejo de cadenas asociado a K , cuyos grupos de homología midan los distintos ciclos que no sean bordes. Para eso ordenamos todos los vértices de K . Si $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ es un n -simplex de K , denotaremos con $[v_0 \dots v_n]$ al simplex orientado (con $v_0 < v_1 < \dots < v_n$). En realidad $[v_0 \dots v_n]$ denota la clase de orientación (dos orientaciones del mismo simplex son equivalentes si difieren en una cantidad par de trasposiciones).

Observar que el borde del 2-simplex orientado $[v_0 v_1 v_2]$ es $[v_1 v_2] - [v_0 v_2] + [v_0 v_1]$ (notar que la arista $[v_0 v_2]$ la recorre en el otro sentido).



2.2.1 Definición. Sea K un complejo simplicial. Definimos el complejo de cadenas $C_*(K)$ asociado a K de la siguiente manera. Para cada $n \geq 0$, tomamos $C_n(K)$ como el grupo abeliano libre generado por los n -símplices orientados de K e identificamos la orientación opuesta a $[v_0 \dots v_n]$ con $-[v_0 \dots v_n]$. Los elementos de $C_n(K)$ serán, por lo tanto, de la forma $\sum m_\sigma \sigma$ con $m_\sigma \in \mathbb{Z}$ y $\sigma = [v_0 \dots v_n]$. Definimos el morfismo de borde $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ en la base

$$d_n([v_0 \dots v_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n]$$

donde $[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n]$ es el $(n - 1)$ -simplex orientado que se obtiene sacando el vértice i . Luego extendemos d_n a todo $C_n(K)$ por linealidad.

2.2.2 Proposición. $(C_*(K), d)$ es efectivamente un complejo de cadenas.

Demostración. Basta comprobar que $d^2([v_0 \dots v_n]) = 0$.

$$d_{n-1}d_n([v_0 \dots v_n]) = d\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n]\right)$$

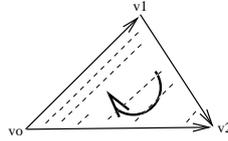
$$= \sum_{i>j} (-1)^{i+j} [v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_n] + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} [v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_n] = 0.$$

□

Definimos la homología de K como la homología de este complejo y la notamos $H_n(K)$ para todo $n \geq 0$.

Observemos que $C_0(K)$ es el \mathbb{Z} -módulo libre generado por los vértices de K y $C_1(K)$ está generado por las aristas en K . El morfismo $d : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$ queda definido por $d([v_0v_1]) = [v_1] - [v_0]$. Por lo tanto $H_0(K)$ es el grupo abeliano libre de dimensión igual a la cantidad de componentes conexas de K (generado por un vértice de cada componente conexa).

Calculemos la homología de



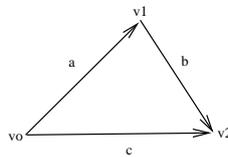
A simple vista observamos que $H_0(K) = \mathbb{Z}$ y $H_n(K) = 0$ para $n \neq 0$. Lo comprobamos con los cálculos:

$C_1(K)$ está generado por las aristas a, b y c y $C_2(K)$ generado por el 2-simplex s . Tenemos que $d_2(s) = b - c + a$ y por lo tanto d_2 es mono y se tiene $H_2(K) = 0$. También vemos que

$$\begin{aligned} d_1(m_1a + m_2b + m_3c) &= m_1(v_1 - v_0) + m_2(v_2 - v_1) + m_3(v_2 - v_0) \\ &= (-m_1 - m_3)v_0 + (m_1 - m_2)v_1 + (m_2 + m_3)v_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\ker d_1 = \text{Im } d_2$ y se tiene $H_1(K) = 0$.

Para calcular la homología de



Hacemos lo mismo que antes y como no hay 2-símplices, tenemos que

$$H_1(K) = \ker d_1 = \mathbb{Z}$$

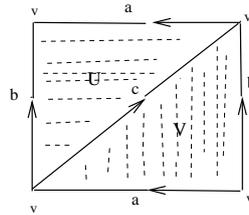
generado por $b - c + a$.

Δ -Complejos (Informal)

Los Δ -complejos están a mitad del camino entre los complejos simpliciales y los CW-complejos. Su estructura no es tan rígida como la de los complejos simpliciales pero tampoco tan flexible como la de CW-complejos. Un Δ -complejo se obtiene tomando uniones disjuntas de complejos simpliciales (con símplices orientados) y luego identificando algunos símplices.

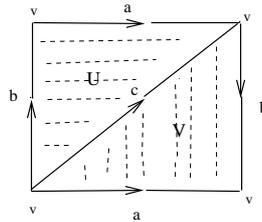
Veamos algunos ejemplos:

Pegando dos 2-símplices U, V , podemos obtener el toro identificando aristas opuestas en la misma dirección



Notar que automáticamente los vértices quedaron todos identificados.

La botella de Klein se obtiene identificando las aristas opuestas de otra forma:



La esfera S^1 puede verse como un 1-símplex



donde se identifican los dos vértices.

No es difícil ver que, en realidad, los Δ -complejos son poliedros, es decir, admiten estructuras de complejos simpliciales. La ventaja es que su estructura de Δ -complejos requiere muchos menos símplices que su estructura simplicial ‘cuadrada’ y este hecho facilita enormemente los cálculos.

Por ejemplo, si queremos darle una estructura simplicial al toro necesitaríamos por lo menos 7 vértices, 21 aristas y 14 triángulos.

Al final de la sección 2.3 probaremos que la homología simplicial y singular de poliedros coinciden. Dejaremos como ejercicio al lector interesado la generalización de esa demostración para probar que la homología singular de un poliedro coincide con la homología inducida por su estructura de Δ -complejo.

Si queremos calcular la homología del toro T (con la estructura de Δ -complejo descrita arriba) tendremos: $C_0(T) = \mathbb{Z}$ generado por el único vértice v , $C_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generado por a, b, c y $C_2(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generado por U y V .

Como $d(a) = d(b) = d(c) = 0$ se tiene $H_0(T) = \mathbb{Z}$. Como $d(U) = d(V) = a + b - c$, entonces $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generado por las clases de a y b y $H_2(T) = \mathbb{Z}$ generado por $U - V$.

Ejercicios Sección 2.2

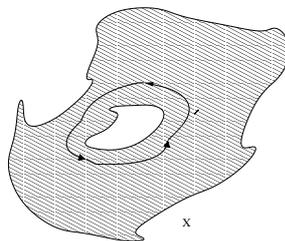
- (a) Sea s un 2-simplex. Calcular la homología simplicial de s y de \dot{s} (el borde de s). Observar que con ésto se estará calculando la homología de D^2 y S^1 .
- (b) Calcular la homología simplicial del tetraedro (borde de un 3-simplex). Observar que se estará calculando la homología de S^2 .
- (c) Calcular la homología de los siguientes Δ -complejos:
1. Botella de Klein.
 2. El paracaídas triangular que se obtiene tomando un 2-simplex e identificando los 3 vértices en uno solo.
 3. El espacio X que se obtiene de un n -simplex identificando todas las caras de la misma dimensión (es decir, X tiene un k -simplex por cada $k \leq n$).

2.3 Homología Singular

En esta sección estudiaremos la teoría de homología más importante de espacios topológicos. Analizaremos algunos ejemplos y veremos los resultados más importantes que sirven para calcular efectivamente los grupos de homología. Luego estudiaremos la relación entre la homología singular de poliedros y la homología simplicial de los complejos simpliciales que los triangulan.

Los resultados obtenidos en esta sección se utilizarán en el último capítulo para probar las distintas aplicaciones de esta teoría.

Para definir el complejo singular de un espacio X , tengamos en mente que queremos medir los agujeros n -dimensionales de X .



un 1-ciclo que
no es borde en X
midiendo el agujero

Consideremos los símlices estándar

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}.$$

Un n -simplex singular en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Sea $S_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por los n -símplices singulares de X . Los elementos de $S_n(X)$ son, por lo tanto, sumas finitas $\sum m_\sigma \cdot \sigma$ con m_σ enteros y $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ continuas.

Por ejemplo, $S_0(X)$ resulta ser el grupo abeliano libre generado por los elementos de X y $S_1(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los caminos en X .

Dado un n -simplex singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, su i -ésima cara $\sigma^{(i)} : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ es el $(n-1)$ -simplex singular definido por

$$\sigma^{(i)}(t_0, \dots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \dots, \overset{i}{0}, \dots, t_{n-1}).$$

Una forma alternativa de expresar $\sigma^{(i)}$ es la siguiente. Si $\{v_0, \dots, v_n\}$ son los vértices de Δ^n (es decir, $\Delta^n = [v_0, \dots, v_n]$), entonces $\sigma^{(i)} = \sigma|_{[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n]}$.

2.3.1 Definición. El complejo singular de X es el complejo de cadenas $(S_*(X), d)$, donde $S_n(X)$ es el grupo abeliano definido anteriormente y $d : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ es el morfismo lineal definido en los elementos de la base como

$$d(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}$$

Para comprobar que $S_*(X)$ es efectivamente un complejo, es decir $d^2 = 0$, se procede de la misma manera que con la homología simplicial.

2.3.2 Definición. Sea X un espacio topológico. Definimos la homología singular de X como la homología de su complejo singular y denotamos $H_n(X)$ a su n -ésimo grupo de homología.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y σ es un n -simplex singular de X , entonces $f\sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ es n -simplex singular de Y . Por lo tanto, extendiendo linealmente, se tiene un morfismo $f_n : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ inducido por $f_n(\sigma) = f\sigma$. Claramente la familia de morfismos $\{f_n\}$ conmuta con los diferenciales, ya que $(f\sigma)^{(i)} = f\sigma^{(i)}$ y por lo tanto la función $f : X \rightarrow Y$ induce un morfismo de complejos singulares $f_* : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ por simple composición y éste induce un morfismo a nivel homología $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para todo n .

2.3.3 Observación. La asignación $f \rightarrow f_*$ es funtorial, es decir, $1_* = 1$ y $(fg)_* = f_*g_*$ por lo tanto un homeomorfismo de espacios topológicos induce un isomorfismo a nivel de complejos singulares y por lo tanto también a nivel homología.

Calculemos la homología singular del singleton $*$ (espacio de un punto). Observemos primero que $S_n(*) = \mathbb{Z}$ generado por la única función de Δ^n al punto. El morfismo de borde $d_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ resulta ser alternativamente la identidad y el morfismo nulo (dependiendo de la paridad de n). Concretamente, el complejo singular de $*$ es

$$\dots \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

y por lo tanto se obtiene

$$H_n(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

2.3.4 Proposición. $H_0(X)$ es el grupo abeliano libre generado por las componentes arcoconexas de X .

La demostración de la proposición queda como ejercicio.

Veamos ahora que una homotopía entre funciones continuas induce una homotopía entre los morfismos de complejos inducidos. Concretamente:

2.3.5 Teorema. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas y sean $f_*, g_* : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ los morfismos inducidos. Si $f \simeq g$, entonces existe una homotopía $\phi : f_* \simeq g_*$. En particular, $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para todo n .

Demostración. Daremos solamente una idea de la demostración. La demostración completa puede leerse por ejemplo en [2, 3, 5].

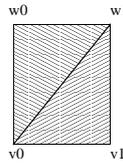
Primero hagamos una reducción del problema. Si $G : X \times I \rightarrow Y$ es una homotopía entre f y g , tenemos $G i_0 = f$, $G i_1 = g$, con $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$ las inclusiones en las tapas del cilindro. Como $G_*(i_0)_* = f_*$, $G_*(i_1)_* = g_*$, entonces basta encontrar una homotopía

$$P : i_0 \simeq i_1 : S_*(X) \rightarrow S_*(X \times I)$$

porque componiendo G_*P se tendrá la homotopía deseada.

Debemos por lo tanto definir $P : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$ tal que $dP + Pd = i_0 - i_1$.

La idea fundamental es dividir $\Delta^n \times I$ en $(n + 1)$ -símplices. Mostramos en el dibujo la división de $\Delta^1 \times I$ en dos 2-símplices.



En general, si $\Delta^n \times 0 = [v_0 \dots v_n]$ y $\Delta^n \times 1 = [w_0 \dots w_n]$ consideramos los $(n + 1)$ -símplices $[v_0 \dots v_i w_i \dots w_n]$ para todo $i = 0, \dots, n$ y definimos

$$P(\sigma) = \sum (-1)^i (\sigma \times 1)|_{[v_0 \dots v_i w_i \dots w_n]}$$

y este morfismo (llamado Prisma) es la homotopía buscada. □

2.3.6 Corolario. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo para todo n .

Por ejemplo, si X es contráctil, entonces $H_n(X) = 0$ para $n \neq 0$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Homología Relativa y Homología Reducida

Si $A \subset X$ es un subespacio, queremos relacionar los grupos de homología de A y X . Observar que el morfismo $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ inducido por la inclusión $i : A \rightarrow X$ no es en general mono (por ejemplo, si $A = S^1 \subset X = D^2$ se tiene $H_1(A) = \mathbb{Z}$ y $H_1(D^2) = 0$).

La forma de relacionar los grupos de homología de subespacios con los del espacio total es mediante los grupos relativos de homología.

Si $A \subset X$, el complejo singular de A puede verse como un subcomplejo del complejo singular de X . De hecho, $S_*(A)$ está generado por los n -símplices singulares de X cuyas imágenes caen en A . Notar además que el morfismo de borde en el complejo de A es la restricción del morfismo de borde de X .

Por lo tanto podemos considerar el complejo cociente $S_*(X)/S_*(A)$ y se obtiene una sec de complejos (es decir, un diagrama de complejos de cadenas que es una sec de grupos abelianos para todo n):

$$0 \rightarrow S_*(A) \xrightarrow{i} S_*(X) \xrightarrow{q} S_*(X)/S_*(A) \rightarrow 0$$

donde i es la inclusión y q el morfismo cociente.

2.3.7 Definición. Dado $A \subset X$, definimos los grupos relativos de homología como

$$H_n(X, A) = H_n((S_*(X)/S_*(A)))$$

Estudiemos ahora cómo se relacionan los grupos $H_n(X)$, $H_n(A)$ y $H_n(X, A)$.

El siguiente resultado relaciona los grupos de homología de los complejos de una sec.

2.3.8 Proposición. Una sec de complejos de cadenas $0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \rightarrow 0$ induce una sucesión exacta larga de las homología

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

El morfismo $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ se llama morfismo de conexión.

Proof. Para probar este resultado utilizamos el lema de la serpiente (ejercicio (d) sección 2.1) aplicado al diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A_n/\text{Im } d & \longrightarrow & B_n/\text{Im } d' & \longrightarrow & C_n/\text{Im } d'' & \longrightarrow & 0 \\ & & d \downarrow & & d' \downarrow & & d'' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker d & \longrightarrow & \ker d' & \longrightarrow & \ker d'' \end{array}$$

los núcleos de los morfismos verticales resultan los grupos de homología en grado n y los conúcleos son los grupos de homología de grado $n - 1$. Luego solamente resta pegar todas las sucesiones resultantes para todos los n . \square

En el caso particular de la sec $0 \rightarrow S_*(A) \xrightarrow{i} S_*(X) \xrightarrow{q} S_*(X)/S_*(A) \rightarrow 0$, se obtiene la sucesión exacta larga de homología relativa:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Para el caso $A = \emptyset$, es claro por definición que $H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$.

Si A es un punto $x \in X$, notamos $H_n(X, x)$ al grupo $H_n(X, \{x\})$. Usando la sucesión exacta de homología relativa y sabiendo que $H_n(*) = 0$ para $n \neq 0$ y $H_0(*) = \mathbb{Z}$, se obtiene que

$$H_n(X, x) = H_n(X) \quad n \geq 1$$

y

$$H_0(X) = H_0(X, x) \oplus \mathbb{Z}$$

Notamos $\tilde{H}_n(X) = H_n(X, x)$ para todo n y los llamamos *grupos de homología reducida* de X .

Notar que $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ para todo $n \geq 1$ y que $\tilde{H}_0(X)$ tiene una dimensión menos que $H_0(X)$.

Por ejemplo, los grupos de homología reducida de los espacios contráctiles valen 0 para todo $n \geq 0$.

Teoremas Clásicos

Ahora estudiaremos el teorema más importante de homología singular, del cual se deducen los resultados clásicos de la teoría que permiten calcular efectivamente los grupos de homología de muchos espacios.

Sea X un espacio y sea \mathcal{U} una familia de subconjuntos de X que cubren todo X . Definimos para todo n el subgrupo $S_n^{\mathcal{U}}(X) \subset S_n(X)$ como el subgrupo generado por los símlices singulares $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ tales que $\text{Im } \sigma \subset U_i$ para algún U_i del cubrimiento.

Si $\sigma \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$ entonces $d\sigma \in S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ y por lo tanto, $(S_*^{\mathcal{U}}(X), d)$ es un subcomplejo del complejo singular de X .

Si \mathcal{U} es una familia de subconjuntos de X , el interior de \mathcal{U} será la familia de los interiores de los $U_i \in \mathcal{U}$. Notaremos $\text{int } \mathcal{U} = \{\text{int } U_i\}$.

2.3.9 Teorema. *Si \mathcal{U} es una familia de subconjuntos de X tal que $\text{int } \mathcal{U}$ cubre X , entonces la inclusión de complejos $i : S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$ es un retracts por deformación. Es decir, existe un morfismo de complejos $r : S_*(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $ri = 1$ e $ir \simeq 1$. En particular, $H_n(X) = H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X))$ para todo n .*

La demostración completa de este teorema puede consultarse en [3, 7]. La idea fundamental que se utiliza para definir el morfismo r es la de subdividir los n -símlices singulares de X (utilizando la subdivisión baricéntrica de los Δ^n) para escribir cada n -simplex como una suma de varios símlices cuyas imágenes caen en algunos de los subconjuntos del cubrimiento. Como dijimos anteriormente, la posibilidad de subdividir los símlices singulares es lo que permite el cálculo de la homología. Veamos cómo usar este resultado para probar los teoremas clásicos.

Empecemos estudiando la sucesión de Mayer-Vietoris.

Sean $U, V \subset X$ tales que $\text{int } U \cup \text{int } V = X$ y consideremos la familia $\mathcal{U} = \{U, V\}$ cuyo interior, por hipótesis, cubre X .

Definimos una sec de complejos

$$0 \rightarrow S_*(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} S_*(U) \oplus S_*(V) \xrightarrow{\beta} S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0$$

donde $\alpha(\sigma) = (\sigma, -\sigma)$ y $\beta(\sigma, \nu) = \sigma + \nu$.

Consideremos la sucesión exacta larga de homologías inducida. En grado n , la homología de $S_*(U \cap V)$ es por definición $H_n(U \cap V)$. Por el ejercicio (f) sección 2.1, la homología de $S_*(U) \oplus S_*(V)$ es $H_n(U) \oplus H_n(V)$ y por el teorema anterior, la homología de $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ es $H_n(X)$. Por lo tanto, obtenemos la sucesión exacta de Mayer-Vietoris:

$$\dots \rightarrow H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

que relaciona la homología de X con las de U, V y $U \cap V$.

Estudiemos ahora el teorema de Escisión.

2.3.10 Teorema. *Sean $A, W \subset X$ tales que la clausura de W está contenida en el interior de A . Entonces la inclusión $i : (X - W, A - W) \rightarrow (X, A)$ induce isomorfismos*

$$H_n(X - W, A - W) = H_n(X, A)$$

para todo n .

Demostración. Sea $B = X - W$. Se tiene entonces $\text{int } A \cup \text{int } B = X$. Sea $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Como el interior de \mathcal{U} cubre X , se tiene que $i : S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$ es retracts por deformación. Pero además se puede comprobar que pasando al cociente

$$i : S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(A) \rightarrow S_*(X)/S_*(A)$$

sigue siendo retracts por deformación.

Como $S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(A) = S_*(B)/S_*(A \cap B)$, se tiene que

$$H_n(B, A \cap B) = H_n(X, A)$$

Luego, como $A \cap B = A - W$, se obtiene el resultado enunciado. \square

Usando este teorema probaremos un resultado muy útil que dice que la homología relativa de un par bueno (X, A) coincide con la homología reducida del espacio cociente X/A .

Primero necesitamos un lema previo.

2.3.11 Lema. *Sean $A, V \subset X$ subespacios tales que $A \subset V$. Las inclusiones de pares $(V, A) \subset (X, A) \subset (X, V)$ inducen una sucesión exacta larga*

$$\dots \rightarrow H_n(V, A) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, V) \rightarrow H_{n-1}(V, A) \rightarrow \dots$$

Demostración. Considerar la sec de complejos

$$0 \rightarrow S_*(V)/S_*(A) \rightarrow S_*(X)/S_*(A) \rightarrow S_*(X)/S_*(V) \rightarrow 0$$

y luego tomar la sucesión exacta larga de homología inducida. \square

2.3.12 Teorema. *Si (X, A) es un par bueno, entonces la función cociente $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induce isomorfismos*

$$q : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, *) = \tilde{H}_n(X/A)$$

para todo n .

Demostración. Sea V abierto de X que contiene a A tal que la inclusión $i : A \rightarrow V$ es retracts por deformación fuerte. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\alpha} & H_n(X, V) & \xleftarrow{\beta} & H_n(X - A, V - A) \\ \downarrow q & & \downarrow q_1 & & \downarrow q_2 \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{\gamma} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{\delta} & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \end{array}$$

Los morfismos horizontales son los inducidos por las distintas inclusiones y los morfismos verticales son inducidos por los cocientes.

Veamos primero que α es un isomorfismo: Como $A \subset V$ es retracts por deformación entonces $H_n(A) = H_n(V)$ y se tiene que $H_n(V, A) = 0$ para todo n . Por la sucesión exacta larga del lema anterior, se deduce inmediatamente que α es isomorfismo.

El morfismo γ es isomorfismo por la misma razón, teniendo en cuenta esta vez que $A/A \rightarrow V/A$ es retracts por deformación.

Los morfismos β y δ son isomorfismos por escisión.

El morfismo vertical q_2 es un isomorfismo porque en este caso la función cociente a nivel topológico resulta un homeomorfismo.

Por la conmutatividad del diagrama, resulta que q es isomorfismo. \square

2.3.13 Corolario.

$$\tilde{H}_n(S^m) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \mathbb{Z} & n = m \end{cases}$$

Demostración. Por inducción en la dimensión de la esfera. Para $m = 0$, tenemos que S^0 son dos puntos discretos y por lo tanto $\tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$ (porque tiene dos componentes arco conexas) y $\tilde{H}_n(S^0) = 0$ si $n > 0$.

Para el paso inductivo, consideremos el par bueno (D^m, S^{m-1}) . Como S^m es homeomorfo al cociente D^m/S^{m-1} , se tiene, aplicando el teorema anterior, que

$$\tilde{H}_n(S^m) = H_n(D^m, S^{m-1}).$$

Además, como D^m es contráctil, por la sucesión larga de homología relativa, se tiene $H_n(D^m, S^{m-1}) = \tilde{H}_{n-1}(S^{m-1})$ y usando la hipótesis inductiva, se obtiene el resultado. \square

Obtenemos el siguiente corolario inmediato.

2.3.14 Corolario. Si $n \neq m$, entonces S^n y S^m no son del mismo tipo homotópico.

Estos resultados serán utilizados en varias aplicaciones importantes que estudiaremos en el capítulo 3.

Relación entre homología simplicial y singular

2.3.15 Definición y Observación. Si $L \subset K$ es un subcomplejo simplicial, se pueden definir los grupos relativos de homología simplicial $H_n(K, L)$ análogamente a lo que ocurre

con la homología singular. Es decir, $H_n(K, L)$ son los grupos de homología del complejo cociente $C_*(K)/C_*(L)$. Claramente se obtiene también en el contexto simplicial una sucesión exacta larga de homología relativa.

$$\dots \rightarrow H_n(L) \rightarrow H_n(K) \rightarrow H_n(K, L) \rightarrow H_{n-1}(L) \rightarrow \dots$$

Sea K complejo simplicial. Notamos con $C_*(K)$ el complejo (de cadenas) asociado a K y $S_*(|K|)$ el complejo singular del poliedro determinado por K . Definimos un morfismo

$$\chi_n : C_n(K) \rightarrow S_n(|K|)$$

que le asigna a cada n -simplex orientado $\sigma = [v_0 \dots v_n]$ de K la función característica $\chi(\sigma) : \Delta^n \rightarrow |K|$, que es el morfismo afín que manda los vértices ordenados de Δ^n a los vértices ordenados de $|\sigma|$.

Claramente los morfismos χ_n conmutan con los respectivos morfismos de borde y se obtiene el morfismo característico

$$\chi : C_*(K) \rightarrow S_*(|K|).$$

Es claro que el morfismo característico induce morfismos entre las homologías simplicial y singular:

$$\chi : H_n(K) \rightarrow H_n(|K|) \quad \chi : H_n(K, L) \rightarrow H_n(|K|, |L|)$$

Ahora podemos enunciar el teorema que relaciona ambas homologías.

2.3.16 Teorema. *El morfismo característico induce isomorfismos $\chi : H_n(K, L) \rightarrow H_n(|K|, |L|)$ para todo n . En particular, tomando $L = \emptyset$, se tiene el isomorfismo $H_n(K) = H_n(|K|)$.*

Demostración. Probamos primero el teorema para K de dimensión finita y $L = \emptyset$. Lo hacemos por inducción en $m = \dim K$.

Sea K^r el r -esqueleto de K .

Observemos que el complejo de cadenas relativo $C_*(K^m)/C_*(K^{m-1})$ vale 0 para todo $n \neq m$ y en grado $n = m$ es el grupo abeliano libre generado por todos los m -símplices de K . Por lo tanto la homología $H_n(K^m, K^{m-1})$ tiene la misma descripción que el complejo relativo.

Por otro lado, para calcular los grupos $H_n(|K^m|, |K^{m-1}|)$, consideremos la función continua $\coprod_{m\text{-símplices}} (\Delta^m, \partial\Delta^m) \rightarrow (|K^m|, |K^{m-1}|)$ inducida por la característica de todos los m -símplices de K . Esta función induce un homeomorfismo evidente

$$\coprod \Delta^m / \coprod \partial\Delta^m \rightarrow |K^m| / |K^{m-1}|$$

El espacio de la izquierda es homeomorfo a la unión en un punto de tantas copias de S^m como m -símplices tiene K y por lo tanto se obtiene que

$$H_n(|K^m|, |K^{m-1}|) = \tilde{H}_n(|K^m| / |K^{m-1}|) = \tilde{H}_n(\bigvee S^m)$$

Por el ejercicio (i) al final de esta sección, sabemos que $\tilde{H}_n(\vee S^m)$ vale 0 para $n \neq m$ y es el grupo abeliano libre con un generador por cada copia de S^m . Por lo tanto, se obtiene que $\chi : H_n(K^m, K^{m-1}) \rightarrow H_n(|K^m|, |K^{m-1}|)$ es un isomorfismo para todo n (observar que χ_m manda generadores en generadores).

Consideremos ahora el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_{n+1}(K^m, K^{m-1}) & \longrightarrow & H_n(K^{m-1}) & \longrightarrow & H_n(K^m) & \longrightarrow & H_n(K^m, K^{m-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(K^{m-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_{n+1}(|K^m|, |K^{m-1}|) & \longrightarrow & H_n(|K^{m-1}|) & \longrightarrow & H_n(|K^m|) & \longrightarrow & H_n(|K^m|, |K^{m-1}|) & \longrightarrow & H_{n-1}(|K^{m-1}|)
 \end{array}$$

Todos los morfismos verticales son los morfismos característicos correspondientes. Vimos que el primero y el cuarto de esos morfismos verticales son isomorfismos y el segundo y el quinto son isomorfismos por hipótesis inductiva. Por el lema de los 5 (ejercicio (c) sección 2.1), resulta que el morfismo del medio es isomorfismo y eso es lo que queríamos probar.

Para K de dimensión infinita, la demostración se deduce de lo anterior ya que todos los esqueletos de K tienen dimensión finita y los ciclos y bordes del complejo singular de $|K|$ intersecan finitos simplices (porque la imagen es compacta).

Para probar el teorema para un par (K, L) en general, consideramos las sucesiones de grupos relativos y nuevamente se prueba usando el lema de los 5 (sabiendo que el teorema vale para K y L). □

2.3.17 Corolario. *Si X es un poliedro compacto, entonces $H_*(X)$ es un grupo abeliano graduado finitamente generado (es decir, los grupos $H_n(X)$ son finitamente generado para todo n y además casi todos son cero).*

Ejercicios Sección 2.3

- (a) Sea X espacio topológico y $\{X_k\}$ familia de componentes arco conexas de X . Probar que $H_n(X) = \oplus H_n(X_k)$.
- (b) Sea A un subespacio de X . Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X .
- (c)
 1. Sea $A \subset X$ un subespacio. Un n -ciclo relativo es un elemento $\sigma \in S_n(X)$ tal que $d\sigma \in S_{n-1}(A)$ y un n -borde relativo es un elemento $\sigma \in S_n(X)$ tal que $\sigma = d\omega + \gamma$ con $\omega \in S_{n+1}(X)$ y $\gamma \in S_n(A)$. Probar que los elementos de $H_n(X, A)$ son las clases de los n -ciclos relativos y que la clase de un ciclo relativo σ es 0 si y sólo si σ es un borde relativo.
 2. Probar que el morfismo de conexión $\partial : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ de la sucesión exacta larga de homología relativa tiene la siguiente descripción: Si $\bar{\sigma}$ es la clase de un ciclo relativo en $H_n(X, A)$, $\partial(\bar{\sigma})$ es la clase del ciclo $d\sigma$ en $H_{n-1}(A)$.

- (d) Probar que una función continua de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce un morfismo $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B) \forall n$
- (e) Probar que una homotopía de pares $h : f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce una homotopía $\phi : f_* \simeq g_*$ entre los complejos relativos y por lo tanto $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.
- (f) Sea X espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$ subespacios tales que $B \subseteq A$. Probar que existe una s.e. larga

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

inducida por las inclusiones.

- (g) Sea $i : A \rightarrow X$ subespacio y sea $C(i)$ el cono de la inclusión i . Probar que $\tilde{H}_n(C(i)) = H_n(X, A)$.
- (h) Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno para todo i , es decir existe un entorno abierto U_i de x_i tal que la inclusión del punto en el abierto es un retracto por deformación fuerte. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases x_i , probar que $\tilde{H}_n(X) = \bigoplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.
- (i) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee_{i \in \Lambda} S^k)$.
- (j) Sea Y un espacio contráctil y sea $y \in Y$. Probar que $H_n(X \times Y, X \times \{y\}) = 0$ para todo espacio X .
- (k) 1. Sea $A \subset X$ retracto (es decir, existe $r : X \rightarrow A$ continua tal que $ri = 1_A$). Probar que $H_q(X) = H_q(A) \oplus H_q(X, A)$.
2. Sea X espacio topológico y sea $p \in S^n$. Deducir del item anterior que

$$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_q(X \times S^n, X \times \{p\})$$

3. Probar la sucesión relativa de Mayer-Vietoris: Sea (X, Y) par topológico, sean $A, B \subset X$ tales que $\text{int } A \cup \text{int } B = X$ y sean $C \subset A$ y $D \subset B$ tales que $\text{int } D \cup \text{int } C = Y$. Probar que existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_q(A \cap B, C \cap D) \rightarrow H_q(A, C) \oplus H_q(B, D) \rightarrow H_q(X, Y) \rightarrow \dots$$

4. Probar, usando el item anterior, que

$$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-1}(X \times S^{n-1}, X \times \{p\})$$

5. Deducir que

$$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-n}(X)$$

y por lo tanto se obtiene el siguiente resultado interesante:

$$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_{q-n}(X)$$

6. Calcular los grupos de homología de $S^n \times S^m$ y los del toro n -dimensional ($S^1 \times \dots \times S^1$).
- (l) Sean x_1, \dots, x_m puntos de \mathbb{R}^n . Calcular $H_q(\mathbb{R}^n - \{x_1, \dots, x_m\})$.
- (m) Dado un espacio X , definimos la suspensión ΣX como el espacio que se obtiene del cilindro $X \times I$ identificando todos los puntos $(x, 1)$ de la tapa en uno solo y todos los puntos $(x, 0)$ de la base en otro punto. Notar que la suspensión se obtiene del cono CX identificando todos los puntos de la base. Probar que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$.

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1 Aplicaciones Básicas

Comencemos estudiando algunas aplicaciones que se deducen inmediatamente del cálculo de $\tilde{H}_n(S^m)$ (2.3.13).

3.1.1 Teorema. *La inclusión $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ no es un retracto (es decir, no existe $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ continua tal que $ri = 1$).*

Demostración. Si existiera tal $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$, entonces la identidad de $\mathbb{Z} = \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$ se factorizaría como $1 = r_*i_*$. Pero como $\tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0$, se tiene que $r_* = 0$ y por lo tanto $1 = 0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, que es un absurdo. \square

Como corolario obtenemos el teorema de punto fijo de Brouwer.

3.1.2 Corolario. *Toda función continua $f : D^n \rightarrow D^n$ tiene puntos fijos.*

Proof. Supongamos que f no tenga puntos fijos, es decir, $f(x) \neq x$ para todo x .

Construimos una función $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ de la siguiente forma. Para cada $x \in D^n$ consideramos la semirrecta con origen en $f(x)$ y que pasa por x y tomamos $r(x)$ como el punto de intersección de esta semirrecta con el borde del disco.

La función r está bien definida porque $f(x) \neq x$ y es continua por serlo f . Además r restringida al borde es la identidad. Por lo tanto hemos construido una retracción y esto contradice el teorema anterior. \square

Vimos en 2.3.14 que S^m y S^n no tienen el mismo tipo homotópico si $n \neq m$. De este resultado deducimos el siguiente.

3.1.3 Teorema. *Si $n \neq m$, entonces \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m no son homeomorfos.*

Demostración. Supongamos que existe un homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, la función $\phi : \mathbb{R}^n - \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^m - \{\phi(x)\}$ sigue siendo un homeomorfismo. Pero $\mathbb{R}^n - \{x\}$ es del tipo homotópico de S^{n-1} y $\mathbb{R}^m - \{\phi(x)\}$ es del tipo homotópico de S^{m-1} y esto contradice 2.3.14. \square

Usando el teorema de escisión podemos generalizar este resultado.

3.1.4 Teorema. Si U es un abierto no vacío de \mathbb{R}^n y V es un abierto de \mathbb{R}^m y U y V son homeomorfos, entonces $n = m$.

Demostración. Tomamos un punto cualquiera $x \in U$ y consideramos el cerrado $U^c \subset \mathbb{R}^n - \{x\}$. Por el teorema de escisión tenemos

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) = H_q(\mathbb{R}^n - U^c, \mathbb{R}^n - \{x\} - U^c) = H_q(U, U - \{x\})$$

y como \mathbb{R}^n es contráctil se tiene

$$H_q(U, U - \{x\}) = \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}) = \begin{cases} 0 & q \neq n \\ \mathbb{Z} & q = n \end{cases}$$

Lo mismo hacemos con $V \subset \mathbb{R}^m$. Ahora bien, si U y V son homeomorfos, entonces también lo son los pares $(U, U - \{x\})$ y $(V, V - \{y\})$ (donde y es el punto imagen de x por el homeomorfismo) y sus grupos de homología deben ser isomorfos. De donde se deduce que $n = m$. \square

Este teorema nos da una idea para definir los grupos locales de homología para cualquier espacio X .

Si X es un espacio y $x \in X$, podemos definir los grupos locales de homología en x como los grupos $H_n(X, X - \{x\})$.

Por el teorema de escisión, para todo entorno abierto U de x se tiene

$$H_n(U, U - \{x\}) = H_n(X, X - x)$$

(de ahí viene el nombre de grupos locales).

Como ejercicio para el lector dejamos la demostración del siguiente resultado.

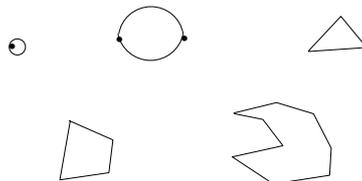
3.1.5 Proposición. Si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo local, entonces

$$f_* : H_n(X, X - \{x\}) \rightarrow H_n(Y, Y - \{f(x)\})$$

es un isomorfismo para todo n .

3.2 Números de Betti y Característica de Euler

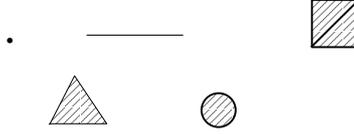
Observemos los siguientes CW-complejos:



¿Qué tienen en común? Principalmente son todos homeomorfos a S^1 . Pero además si contamos sus 0-celdas y 1-celdas comprobamos que la cantidad de 0-celdas menos la

cantidad de 1-celdas (o vistos como poliedros, la cantidad de vértices menos la cantidad de aristas) es igual a 0.

Consideremos ahora los siguientes CW-complejos contráctiles



Todos cumplen que la cantidad de 0-celdas menos la cantidad de 1-celdas más la cantidad de 2-celdas es igual a 1.

De esto se trata la característica de Euler, que ahora empezaremos a estudiar.

Recordemos primero que todo grupo abeliano finitamente generado M puede descomponerse en forma única como

$$M = \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_r}$$

con n_i/n_{i+1} para todo i .

La dimensión de la parte libre de M es el rango de M y lo denotamos $r(M) = m$.

3.2.1 Definición. Un grupo abeliano graduado $M_* = \{M_n\}$ es finitamente generado si todos los grupos M_n son finitamente generados y son todos nulos salvo finitos.

Notar que si (C_*, d) es un complejo finitamente generado, entonces la homología $H_*(C_*)$ también resulta finitamente generada.

3.2.2 Definición. Si M_* es un grupo abeliano graduado finitamente generado, su característica de Euler es el entero

$$\chi(M_*) = \sum (-1)^n r(C_n)$$

El siguiente resultado algebraico es la clave de este tema:

3.2.3 Proposición. Sea (C_*, d) un complejo de cadenas. Entonces $\chi(C_*) = \chi(H_*(C))$.

Demostración. Observemos primero que, si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ es una sec, entonces $r(B) = r(A) + r(C)$.

Para todo n , consideremos las siguientes sec

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1} \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \xrightarrow{q} H_n(C) \rightarrow 0$$

donde B_n son los n -bordes y Z_n son los n -ciclos y q es el morfismo cociente.

Se tiene, por lo tanto, que $r(C_n) = r(Z_n) + r(B_{n-1})$ y $r(Z_n) = r(B_n) + r(H_n(C))$. Reemplazando en la primera ecuación obtenemos

$$r(C_n) = r(H_n(C)) + r(B_n) + r(B_{n-1})$$

y tomando las sumas alternadas se obtiene el resultado enunciado. □

3.2.4 Observación. Si X es un CW-complejo, podemos definir la homología celular de X análogamente a como definimos la homología simplicial, tomando un complejo de cadenas que en grado n es el grupo abeliano libre generado por las n -celdas de X . Se puede comprobar también que la homología celular y singular de los CW-complejos son isomorfas.

Si X es un CW-complejo con finitas celdas (es decir, compacto), su complejo celular asociado resulta evidentemente finitamente generado (por las finitas celdas) y por lo tanto también su homología es finitamente generada. Definimos el n -ésimo número de Betti de X como el rango de su n -ésimo grupo de homología:

$$b_n(X) = r(H_n(X))$$

3.2.5 Definición. Sea X un CW-complejo finito (o en particular, un complejo simplicial finito). Definimos la característica de Euler de X como el entero

$$\chi(X) = \sum (-1)^n \alpha_n$$

donde α_n es la cantidad de n -celdas (o n -símplices) de X .

Por la proposición anterior se tiene que

$$\chi(X) = \sum (-1)^n \alpha_n = \sum (-1)^n r(C_n) = \sum (-1)^n r(H_n(C)) = \sum (-1)^n b_n(X)$$

Entonces la característica de Euler depende de la homología de X y por lo tanto es un invariante topológico (no depende de la estructura celular de X).

Como consecuencia evidente, si dos CW-complejos tienen el mismo tipo homotópico, entonces sus características de Euler coinciden.

Es claro que este invariante es mucho más fácil de calcular que la homología pero al mismo tiempo es menos poderoso. Sabemos, por ejemplo, que la homología diferencia S^n de S^m para todo $n \neq m$, en cambio

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par} \end{cases}.$$

3.3 Teorema de Separación de Jordan-Brouwer

Estudiaremos ahora las propiedades de separación de las esferas y deduciremos dos teoremas famosos: el teorema de separación de Jordan-Brouwer y el teorema de invariancia de dominio, que fueron probados por Brouwer a principios del siglo XX.

3.3.1 Teorema. Sea $A \subset S^n$ un subespacio homeomorfo a I^k (ó D^k) con $0 \leq k \leq n$. Entonces $\tilde{H}_q(S^n - A) = 0$ para todo q .

Demostración. Lo probamos por inducción en k .

El caso $k = 0$ es sencillo pues $I^0 = *$ y $S^n - * = \mathbb{R}^n$ que es contráctil.

Para el paso inductivo, consideremos el homeomorfismo $h : I^k \rightarrow A$.

Tomamos $I^k = I^{k-1} \times [0, 1]$ y consideramos

$$A^- = h(I^{k-1} \times [0, 1/2]) \quad A^+ = h(I^{k-1} \times [1/2, 1])$$

Sean $U = S^n - A^-$ y $V = S^n - A^+$. Como A^- y A^+ son compactos y S^n es Hausdorff, entonces son cerrados y por lo tanto U y V resultan abiertos de S^n .

Notar que $U \cap V = S^n - A$ y $U \cup V = S^n - h(I^{k-1} \times \{1/2\})$.

Por hipótesis inductiva, $\tilde{H}_q(U \cup V) = 0$ y por Mayer-Vietoris resulta

$$\tilde{H}_q(U \cap V) = \tilde{H}_q(U) \oplus \tilde{H}_q(V)$$

para todo q .

Supongamos que $\tilde{H}_q(S^n - A) \neq 0$ para algún q . Entonces existe un q -ciclo σ que no es borde en $S^n - A$ y por lo anterior, ese ciclo no es borde en $S^n - A^-$ ó en $S^n - A^+$. Supongamos que no es borde en $S^n - A^-$. Tomamos $I^{k-1} \times [0, 1/4]$ e $I^{k-1} \times [1/4, 1/2]$ y hacemos lo mismo que antes. Así nos vamos construyendo una sucesión de intervalos encajados

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

de tal forma que σ no es borde en $S^n - h(I^{k-1} \times I_r)$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Sea $p \in \bigcap_r I_r$. Nuevamente por hipótesis inductiva sabemos que σ es un borde en $S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$. Es decir $\sigma = d\omega$ y ω es una suma finita de $(q+1)$ -símplices singulares

$$w_i : \Delta^{q+1} \rightarrow S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$$

cuyas imágenes son compactos.

Como $\{S^n - h(I^{k-1} \times I_r)\}_r$ es un cubrimiento abierto de $S^n - h(I^{k-1} \times \{p\})$ y como $I_{r+1} \subset I_r$ para todo r , entonces existe un r_0 tal que ω cae en $S^n - h(I^{k-1} \times I_{r_0})$ y por lo tanto σ es borde en $S^n - h(I^{k-1} \times I_{r_0})$. Eso es una contradicción y por lo tanto queda probado el teorema. \square

3.3.2 Corolario. Si $n \geq 2$, una curva simple no cerrada en S^n (ó en \mathbb{R}^n) no lo separa.

Proof. Una curva simple no cerrada es homeomorfa a I y por el teorema anterior se tiene que $\tilde{H}_0(S^n - I) = 0$ y por lo tanto $S^n - I$ tiene una componente arco conexa. Como los abiertos de S^n son localmente arco conexos, las componentes conexas y arco conexas son las mismas y por lo tanto $S^n - I$ tiene una sola componente conexa.

Para el caso \mathbb{R}^n , simplemente hay que tener en cuenta que $\mathbb{R}^n = S^n - \{*\}$ y que sacarle un punto a un abierto de S^n (para $n \geq 2$) no cambia sus propiedades de conexión. \square

3.3.3 Teorema. Si $B \subset S^n$ es un subespacio homeomorfo a S^k con $k = 0, \dots, n-1$, entonces

$$\tilde{H}_q(S^n - B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - k - 1 \\ 0 & q \neq n - k - 1 \end{cases}$$

Demostración. Lo probamos por inducción en k .

El caso $k = 0$ es simple, dado que $S^n - B$ resulta, en este caso, del mismo tipo homotópico que S^{n-1} y, por lo tanto, se tiene

$$\tilde{H}_q(S^n - B) = \tilde{H}_q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - 1 \\ 0 & q \neq n - 1 \end{cases}.$$

Para el paso inductivo consideramos B^+ como el hemisferio norte de B (es decir, la imagen por el homeomorfismo del hemisferio norte de la esfera) y B^- el hemisferio sur. Por lo tanto B^+ y B^- son homeomorfos a D^k y $B^- \cap B^+$ es homeomorfo a S^{k-1} .

Consideramos $U = S^n - B^+$ y $V = S^n - B^-$ que resultan abiertos en S^n . Entonces $U \cap V = S^n - B$ y $U \cup V = S^n - (B^+ \cap B^-)$.

Por el teorema anterior, resultan $\tilde{H}_q(U) = 0$ y $\tilde{H}_q(V) = 0$ para todo grado q y por Mayer-Vietoris aplicado a U y V , obtenemos

$$\tilde{H}_q(S^n - B) = \tilde{H}_{q+1}(S^n - (B^+ \cap B^-)).$$

Utilizando la hipótesis inductiva se obtiene el resultado buscado. \square

Como corolario inmediato obtenemos el Teorema de Separación de Jordan-Brouwer.

3.3.4 Teorema. *Si $B \subset S^n$ es un subespacio homeomorfo a S^{n-1} , entonces B separa a S^n en dos componentes conexas de las cuales B es el borde.*

Demostración. Por el resultado anterior tenemos que $\tilde{H}_0(S^n - B) = \mathbb{Z}$ y eso significa que $S^n - B$ tiene dos componentes arco conexas. Como $S^n - B$ es un abierto de S^n , entonces es localmente arco conexo y por lo tanto deducimos que $S^n - B$ tiene dos componentes conexas.

Sean C_1, C_2 las dos componentes. Veamos que $B = \partial C_1 = \partial C_2$ (donde el borde ∂C_i es la clausura $\overline{C_i}$ menos el interior $\text{int } C_i$).

Como C_i son abiertos en $S^n - B$ y $S^n - B$ es abierto en S^n , entonces C_i son abiertos en S^n y por lo tanto $B \cup C_i$ resultan cerrados en S^n . Eso implica que $\overline{C_i} \subset B \cup C_i$ y por lo tanto $\partial C_i \subset B$.

Resta ver, entonces, que $B \subset \partial C_i$. Como B no interseca a C_i , basta ver que $B \subset \overline{C_i}$. Sea $x \in B$, debemos ver que todo entorno abierto U de x interseca a $\overline{C_i}$.

Sea $U \subset S^n$ abierto, con $x \in U$. Como B es homeomorfo a S^{n-1} , existe $K \subset U \cap B$ tal que $x \in K$ y $B - K$ es homeomorfo a D^{n-1} . Por el primer teorema de esta sección, sabemos que $\tilde{H}_0(S^n - (B - K)) = 0$ y por lo tanto $S^n - (B - K)$ es arco conexo.

Tomamos puntos $p_1 \in C_1$ y $p_2 \in C_2$ y, por ser arco conexo, podemos encontrar un camino ω de p_1 a p_2 que caiga en $S^n - (B - K)$. Como C_i son las componentes de $S^n - B$, entonces el camino debe cruzar por $K \subset U$ y por lo tanto U interseca a C_i . \square

Observar que este teorema es una generalización del teorema de la curva de Jordan que dice que toda curva simple y cerrada en S^2 (ó en \mathbb{R}^2) lo separa en dos componentes conexas y la curva resulta el borde común de ambas componentes.

Ahora llegó el turno de estudiar el teorema de invariancia de dominio.

Observemos primero que si X es un espacio topológico y $A, B \subset X$ son subespacios homeomorfos, aunque uno de ellos sea abierto en X , el otro no tiene por qué ser también abierto en X . Por ejemplo, tomando

$$X = I, \quad A = (0, 1/2], \quad B = (1/2, 1]$$

resulta que A y B son homeomorfos via $\phi : A \rightarrow B$, $\phi(x) = x + 1/2$ y B es abierto en I , en cambio A no lo es.

El teorema de invariancia de dominio dice que ser abierto en \mathbb{R}^n es un invariante topológico (de ahí el nombre, ya que anteriormente llamaban dominios a los abiertos de \mathbb{R}^n). Concretamente:

3.3.5 Teorema. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n entonces X resulta abierto en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Tomando $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ la compactificación en un punto, trasladamos el problema a un subespacio $X \subset S^n$ homeomorfo a un abierto de S^n .

Sea $x \in X$. Como X es homeomorfo a un abierto de S^n y las bolas son una base de entornos, entonces existe un entorno D de x en X tal que D es homeomorfo a D^n . Sea S la imagen de $S^{n-1} = \partial D^n$ vía ese homeomorfismo.

Por el primer teorema de esta sección, el abierto $S^n - D$ es conexo y por el segundo teorema, el abierto $S^n - S$ tiene dos componentes conexas. Como

$$S^n - S = (S^n - D) \cup (D - S)$$

y como $D - S$ también es conexo (por ser imagen de un conexo), entonces $S^n - D$ y $D - S$ son exactamente las dos componentes de $S^n - S$. En particular, $D - S$ resulta abierto en $S^n - S$ y por lo tanto resulta abierto en S^n .

Se tiene entonces $x \in D - S \subset X$, con $D - S$ abierto en S^n y por lo tanto X resulta abierto en S^n . \square

3.3.6 Corolario. *Sean M y N variedades topológicas n -dimensionales (Hausdorff y localmente homeomorfas a \mathbb{R}^n). Si M es compacto y N conexo, entonces toda inmersión $i : M \rightarrow N$ es un homeomorfismo (es decir, i resulta sobreyectiva).*

Demostración. Sea $i : M \rightarrow N$ una inmersión. Veamos que i es sobreyectiva.

Como $i(M) \subset N$ es compacto y N es Hausdorff, entonces $i(M)$ es cerrado en N . Basta verificar que $i(M)$ es abierto en N , ya que, al ser N conexo, resultará $i(M) = N$.

Sea $x \in M$. Existe un abierto $U \subset M$ que contiene a x y un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$, donde $\phi(U)$ es abierto de \mathbb{R}^n . Existe además un abierto $V \subset N$ que contiene a $i(x)$ y un homeomorfismo $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$.

Cambiando U por $i^{-1}(i(U) \cap V)$, podemos suponer $i(U) \subset V$.

Se tiene entonces un homeomorfismo $\psi i \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(i(U))$. Por el teorema de invariancia de dominio, resulta $\psi(i(U))$ abierto en \mathbb{R}^n y entonces $i(U) \subset N$ es abierto que contiene a $i(x)$. Esto prueba que M es abierto. \square

Como consecuencias inmediatas de este resultado enumeramos algunos corolarios cuya demostración es muy simple y queda a cargo del lector.

3.3.7 Corolario. *S^n no puede ser inmerso en \mathbb{R}^n .*

3.3.8 Corolario. *Si $m > n$ entonces \mathbb{R}^n no tiene subespacios homeomorfos a \mathbb{R}^m .*

3.3.9 Corolario. *Si $m > n$, entonces no existe $i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva.*

Ejercicios Capítulo 3

- (a) Probar los últimos tres corolarios.
- (b) Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces toda $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva es abierta.
- (c) Sean X e Y poliedros compactos. Probar que $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$.
- (d) Calcular $H_q(S^n - X)$ para X un subespacio homeomorfo a $S^k \amalg S^l$.
- (e) Idem ejercicio anterior pero para X homeomorfo a $S^k \vee S^l$.
- (f) Sea $(D, S) \subset (D^n, S^{n-1})$ tal que (D, S) es homeomorfo a (D^k, S^{k-1}) y $D \cap S^{n-1} = S$. Probar que la inclusión $i : S^{n-1} - S \rightarrow D^n - D$ induce isomorfismos en la homología.

Bibliografía

- [1] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer.
- [2] M. Greenberg. *Lectures on Algebraic Topology*. W.A. Benjamin, Inc. (1971).
- [3] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002).
- [4] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall (1975).
- [5] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer (1966).
- [6] R. Switzer. *Algebraic Topology. Homotopy and Homology*. Springer-Verlag (1975).
- [7] J.Vick. *Homology Theory*. Academic Press (1973).
- [8] CH. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press (1994).

E-mail address: gminian@dm.uba.ar