Teoría de Homotopía 2006
Práctica Cero: Entrando en tema.

Notaciones y observaciones preliminares:

a) Si X, Y son espacios topológicos, entonces $[X, Y]$ denotará el conjunto de clases homotópicas de funciones de X a Y. Si X e Y son espacios punteados (es decir, espacios con un punto base fijo), entonces $[X, Y]$ denota el conjunto de clases homotópicas de funciones punteadas (y donde las homotopías también son relativas al punto base). Cuando queramos explicitar los puntos base, notaremos $[(X, x), (Y, y)]$.

b) Recordar que una equivalencia homotópica $f : X \to Y$ es una función continua que admite inversa homotópica (es decir, existe alguna $g : Y \to X$ continua tal que las composiciones en ambos sentidos son homotópicas a las identidades). Se dice que dos espacios tienen *el mismo tipo homotópico* si existe alguna equivalencia homotópica entre ambos. Por ejemplo, los espacios contráctiles son los espacios que tienen el mismo tipo homotópico que el singleton $*$.

c) Notaremos con S^n la esfera n-dimensional (los puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ de norma uno) y con D^n al disco cerrado n-dimensional (los puntos de $\mathbb{R}^n$ de norma menor o igual a 1). Notaremos con I al intervalo real $[0, 1]$.

d) Dada una homotopía $H : X \times I \to Y$, denotaremos $H_t : X \to Y$ a las funciones $H_t(x) = H(x, t)$ para $t \in I$.

Parte Uno: Precalentando

1. Probar que si $q : X \to Y$ es cociente y Z es localmente compacto y Hausdorff entonces $q \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cociente (Sugerencia: Ley exponencial).

2. Probar que el cociente D^n/S^{n-1} es homeomorfo a S^n.

3. Sean X y Z espacios contráctiles. Probar que tienen el mismo tipo homotópico y que cualquier función continua entre ellos es una equivalencia homotópica.

4. Probar que la inclusión de S^{n-1} como el ecuador de S^n, se puede extender a las inmersiones $i^-, i^+ : D^n \to S^n$ del disco en el hemisferio sur (resp. norte) de la esfera. Más aún, i^- e i^+ son homotópicas pero no son homotópicas relativas a S^{n-1}.

5. Sea $A \subset X$ subespacio y supongamos existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que
   a) $H(x, 0) = x \ \forall x \in X$
   b) $H(A \times I) \subset A$
   c) $H(a, 1) = a_0 \forall a \in A$
   Probar que la función cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

6. Sea (X, x) un espacio punteado. Observar que $\pi_0(X) = [(S^0, *), (X, x)]$ y que $\pi_1(X, x) = [(S^1, *), (X, x)]$. ¿Cómo definiría $\pi_n(X, x)$ para $n \geq 2$? (Se aceptan respuestas lógicas aunque también algunas más creativas).

7. Sea (X, x) un espacio punteado y sea ΩX el espacio punteado de lazos en x con la topología compacto-abierta. Notar que $\pi_1(X) = \pi_0(\Omega X)$. ¿Cómo definiría ahora $\pi_n(X, x)$ para $n \geq 2$? Observar que esta igualdad es por ahora una igualdad de conjuntos. Veremos en la Parte Dos que el conjunto $\pi_0(\Omega X)$ tiene una estructura natural de grupo y que la igualdad mencionada es en realidad un isomorfismo de grupos.

Parte Dos: ΩX y H-grupos

Empezamos con un espacio punteado X (con punto base x) y consideramos el espacio punteado ΩX. El punto base de ΩX es el lazo constante x que notaremos c_x. Tenemos una operación continua bien conocida en ΩX que está dada por la concatenación de caminos: denotamos $\omega * \tilde{\omega}$ al lazo que resulta de concatenar ω y $\tilde{\omega}$ yendo al doble de velocidad.

Es claro que esta operación no es asociativa ni tiene elemento neutro, pero es *homotópicamente asociativa* y el lazo constante c_x es una *identidad homotópica.* Además existe una *inversa homotópica.* Concretamente:

1. Probar que $* : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ es una operación continua y que además:
   a) La operación es homotópicamente asociativa, es decir, $(\omega_1 * \omega_2) * \omega_3 \simeq \omega_1 * (\omega_2 * \omega_3)$ relativa al punto base.
   b) El lazo constante c_x es una identidad homotópica, es decir, $\omega * c_x \simeq \omega \simeq c_x * \omega$ relativa al punto base.
   c) Existe una aplicación continua $\nu : \Omega X \to \Omega X$ que manda ω en $\overline{\omega}$ tal que $\omega * \overline{\omega} \simeq \overline{\omega} * \omega \simeq c_x$ relativa al punto base.

   Un espacio punteado Z que tiene una operación continua que cumple los tres items anteriores se denomina *H-grupo.*

2. Sea Z un H-grupo con operación $* : Z \times Z \to Z$. Dadas dos funciones continuas $f, g : Y \to Z$, denotamos $f * g : Y \to Z$ la composición $*(f, g) : Y \to Z \times Z \to Z$. Probar que para cualquier espacio punteado Y, el conjunto $[Y, Z]$ tiene una operación bien definida por $[f] * [g] = [f * g]$ y con esta operación resulta un grupo.

3. Deducir inmediatamente del item anterior que $\pi_0(\Omega X)$ tiene estructura de grupo inducida por la concatenación de lazos y que la igualdad del ejercicio 7 de la primera parte es en realidad un isomorfismo de grupos.

4. Pensar ejemplos de H-grupos (que no sean explícitamente espacios de lazos).

Parte Tres: Propiedades de levantamiento de los revestimientos

Para toda esta parte, consideremos un revestimiento $p : E \to B$.

Dada una función continua $f : Y \to B$, un *levantado* de f es una función continua $\tilde{f} : Y \to E$ tal que $p\tilde{f} = f$.

1. Teorema: Supongamos que tenemos una homotopía $H : Y \times I \to B$ y un levantado $\tilde{H}_0 : Y \to E$ de H_0, entonces existe una única homotopía $\tilde{H}$ que levanta a H y que en el instante cero coincide con la función $\tilde{H}_0$.
   Para probar este resultado lo hacemos en varios pasos:
   a) Para cada $y \in Y$ construir un levantado $\tilde{H} : V \times I \to E$ que cumpla lo pedido, donde V es un entorno de y. Para hacer esto, usar la compacidad de I para hallar una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$ del intervalo y un entorno W de y tal que $H(W \times [t_i, t_{i+1}])$ caiga en un entorno parejamente cubierto. Usar ahora que en los entornos parejamente cubiertos tenemos inversas locales. De esta forma construimos los levantados parciales (faltará probar que son únicos y que podemos pegarlos bien para hallar un levantado global).
   b) Probar ahora la unicidad del enunciado para el caso $Y = *$. Usar la misma técnica del item anterior (partir el intervalo en finitos intervalitos tales que la función H los mande dentro de algún entorno parejamente cubierto).
   c) Usar el item anterior para ver que podemos pegar bien los levantados del primer item y que son únicos.

2. Como caso particular del ejercicio anterior, probar la propiedad de levantado de caminos: Dado un camino ω en B que empieza en un punto b_0 y dado un punto e_0 en la fibra de b_0, existe un único camino $\tilde{\omega}$ en E que levanta al camino ω y que empieza en e_0.

3. Probar que el morfismo inducido $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo.

4. Llamamos $Fix(e_0)$ al subgrupo $p_*(\pi_1(E, e_0))$ del grupo $\pi_1(B, b_0)$. Sabemos que un lazo en b_0 levanta a un único camino que empieza en e_0.Probar que $Fix(e_0)$ consiste en las clases de lazos que levantan a lazos.

5. Sabemos que, si B es conexo, el cardinal de la fibra se mantiene constante. Probar que este cardinal coincide con el índice de $Fix(e_0)$ en $\pi_1(B, b_0)$.