Teoría de Homotopía 2006

Práctica Uno: Algunas aplicaciones de Van Kampen.

1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ una unión de espacios convexos $X_1, \ldots, X_m$ tales que $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$ para todo i, j, k. Probar que X es simplemente conexo.
2. Sea $n \geq 3$ y sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Probar que $\mathbb{R}^n - A$ es simplemente conexo.
3. Sea $X \subset \mathbb{R}^3$ una unión de n rectas por el origen. Calcular $\pi_1(\mathbb{R}^3 - X)$.
4. Sea $n \geq 3$. Supongamos que Y se obtiene de X adjuntándole n-celdas. Probar que la inclusión $i : X \to Y$ induce un isomorfismo en el π_1.
5. Usar el ejercicio anterior para probar que, si $n \geq 3$, el complemento de un subespacio discreto de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.
6. Sea X el espacio que se obtiene de S^2 identificando el polo norte con el polo sur. Calcular su grupo fundamental. (Sugerencia: darle a X una estructura celular).
7. Probar que $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2)$ es no numerable.
8. Sean $U, V \subset X$ abiertos tales que $X = U \cup V$. Sean $A_1, A_2 \subset A \subset X$ tales que A es representativo en $U \cap V$, A_1 es representativo en U y A_2 representativo en V y tales que $A \cap U \cap V = A_1 \cap A_2$. Probar que se tiene un pushout de grupoides

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V)A \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 U A_1 \arrow[d] \\ \pi_1 V A_2 \arrow[r] & \pi_1 X(A_1 \cap A_2) \end{tikzcd}$$

9. Calcular el grupo fundamental del plano proyectivo (que se obtiene del disco D^2 identificando los puntos $x \in \partial D^2$ con sus antípodas).
10. Calcular el grupo fundamental de la Botella de Klein (el espacio que se obtiene del cilindro $S^1 \times I$ identificando los puntos $(z, 0)$ con $(z^{-1}, 1)$).
11. Probar que para todo grupo G existe un complejo celular de dimensión 2 (es decir un espacio que se obtiene de un grafo adjuntándole 2-celdas) cuyo grupo fundamental es isomorfo a G.