

Teoría de Homotopía 2006
Práctica Dos
Revestimientos de Grupoides y de Espacios Topológicos.

Notaciones: Dado un grupoide $\mathcal{G}$, denotamos con $\mathcal{G}_0$ a su conjunto de objetos. Dados $x, y \in \mathcal{G}_0$, denotamos $\mathcal{G}(x, y)$ al conjunto de flechas de x a y . Cuando $x = y$ denotamos $\mathcal{G}_x = \mathcal{G}(x, x)$ (notar que esto es un grupo con la composición). Si $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ es un revestimiento de grupoides y $b \in \mathcal{B}_0$, notamos con F_b a la fibra de b , es decir al conjunto de objetos de $\mathcal{E}$ que están en la preimagen de b .

1. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento de espacios topológicos. Probar que $p_* : \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B)$ es un revestimiento de grupoides.
2. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revestimiento de grupoides. Sea $b \in \mathcal{B}_0$ y $e \in F_b$. Probar que $p : \mathcal{E}_e \rightarrow \mathcal{B}_b$ es un monomorfismo de grupos. Notaremos con $Fix(e)$ al subgrupo $p(\mathcal{E}_e)$.
3. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revestimiento de grupoides conexos. Probar que son equivalentes:
 - a) p es un isomorfismo.
 - b) p es una función biyectiva en los objetos.
 - c) $Fix(e) = \mathcal{B}_b$ para algún $b \in \mathcal{B}_0$ y $e \in F_b$.
4. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revestimiento de grupoides conexos, sea $b \in \mathcal{B}_0$ y $e \in F_b$. Recordar que p se dice regular si $Fix(e)$ es un subgrupo normal de $\mathcal{B}_b$. Probar que p es regular si y sólo si para todo $\omega \in \mathcal{B}_b$ se cumple que o todos sus levantados $p^{-1}(\omega)$ son lazos o ninguno de sus levantados lo son.
5. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revestimiento de grupoides conexos, sea $b \in \mathcal{B}_0$ y $e, e' \in F_b$. Probar que $Fix(e)$ y $Fix(e')$ son subgrupos conjugados.
6. Sean $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ y $q : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{G}$ morfismos de grupoides. Probar que:
 - a) Si p y q son revestimientos entonces qp es revestimiento.
 - b) Si q y qp son revestimientos entonces p lo es.
 - c) Si p y qp son revestimientos y p es sobreyectiva en objetos entonces q es revestimiento.
7. ¿Vale el análogo del ejercicio anterior para el caso de revestimientos de espacios? Probar en qué casos sigue siendo válido y qué hipótesis adicionales hay que pedir.
8. Usando el teorema de levantamiento de morfismos visto en clase y los resultados anteriores probar el siguiente resultado: Sean $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ y $q : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B}$ revestimientos de grupoides conexos, $b \in \mathcal{B}_0$ y e y g en las respectivas fibras de b . Si $\mathcal{E}_e \subset \mathcal{G}_g$ entonces existe un único revestimiento $r : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $r(e) = g$ y $p = qr$. Observar que si $\mathcal{E}_e = \mathcal{G}_g$ entonces r es un isomorfismo. Observar también que, si $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ es un revestimiento *universal* (es decir, $\mathcal{E}_e = 1$), entonces $\mathcal{E}$ es revestimiento de todos los revestimientos de $\mathcal{B}$.
9. Enunciar y probar el análogo del ejercicio anterior para el caso de revestimientos de espacios topológicos. Recordar que en este caso, se debe reemplazar los grupos $\mathcal{E}_e$ y $\mathcal{B}_b$ por los grupos fundamentales de los espacios correspondientes.
10. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revestimiento conexo, sea $b \in \mathcal{B}_0$ y $e \in F_b$. Una *transformación deck* de p es un isomorfismo $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $ph = p$. Probar que, si p es regular, entonces el grupo de transformaciones deck de p (con la composición), que denotaremos $Aut(p)$ es isomorfo al cociente $\mathcal{B}_b / Fix(e)$. En particular, si p es revestimiento universal, se tiene que $Aut(p) = \mathcal{B}_b$.
11. Enunciar (haciendo también las respectivas definiciones) y probar los resultados análogos del ejercicio anterior para el caso de espacios topológicos.

La acción del grupo en la fibra.

Recordar que una acción de un grupo G en un conjunto S es una función $\phi : G \times S \rightarrow S$ (y se denota $g.s = \phi(g, s)$) tal que $1.s = s$ para todo s y $g.(g'.s) = (g.g').s$.

El grupo de isotropía de un elemento s es el subgrupo $G_s = \{g \in G \mid g.s = s\}$. La órbita de un elemento s es el subconjunto $O_s = \{g.s \mid g \in G\}$.

La acción se dice libre si $G_s = 1$ para todo $s \in S$ (equivalentemente, si $g.s = s$ para algún s , entonces $g = 1$).

La acción se dice transitiva si S tiene una única órbita (equivalentemente, si para todo s, s' existe un g tal que $g.s = s'$).

Cuando G actúa en S (en forma transitiva, libre) decimos que S es un G -conjunto (transitivo, libre).

12. Probar que:

- a) Si H es un subgrupo de G , entonces el conjunto de coclases G/H es un G -conjunto transitivo.
- b) Si S es un G -conjunto transitivo, se tiene un isomorfismo canónico de G -conjuntos entre G y G/G_s para cualquier $s \in S$.

13. Sea S un G -conjunto transitivo y sea $s \in S$. Denotamos con $Aut_G(S)$ el grupo de G -automorfismos de S . Probar que el grupo $Aut_G(S)$ es isomorfo al grupo $N(G_s)/G_s$ (donde $N(G_s)$ denota el normalizador de G_s en G).

14. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ un revestimiento de grupoides conexos y sea $b \in \mathcal{B}_0$. Probar que el levantamiento de caminos induce una acción transitiva de $\mathcal{B}_b$ en la fibra F_b . Dado $e \in F_b$, el grupo de isotropía de e por esta acción coincide con $Fix(e)$. Deducir que se tiene un isomorfismo de $\mathcal{B}_b$ -conjuntos:

$$F_b = \mathcal{B}_b / Fix(e).$$

15. Probar que $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ es universal si y sólo si la acción de $\mathcal{B}_b$ en F_b es libre. En ese caso F_b resulta isomorfo como $\mathcal{B}_b$ -conjunto a $\mathcal{B}_b$.

16. Enunciar y probar los últimos dos ejercicios para revestimientos de espacios topológicos.