

Teoría de Homotopía 2006
Práctica Tres
Cilindros y conos. Cofibraciones y fibraciones.

1. Probar que un espacio X es contráctil si y sólo si es retracto de su cono (es decir, existe $r : CX \rightarrow X$ tal que $ri = 1_X$).
2. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Se define el cono de f como el espacio C_f que se obtiene pegando el cono de X con el espacio Y e identificando los puntos $\overline{(x, 1)}$ del cono de X con los puntos $f(x)$ de Y . Notar que se tiene una inclusión $i : Y \rightarrow C_f$. Dada una función continua $g : Y \rightarrow W$, probar que $gf : X \rightarrow W$ es nullhomotópica si y sólo si g se puede extender continuamente de Y a C_f .
3. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y sea Z_f el cilindro de f . Probar que la inclusión $j : Y \rightarrow Z_f$ es un retracto por deformación fuerte.
4. Sea $i : A \rightarrow X$ una cofibración y sean $f, g : A \rightarrow Y$ continuas tales que $f \simeq g$. Probar que f se extiende continuamente a X si y sólo si g se extiende. Además, si una de las dos se extiende, se puede encontrar una extensión de la otra que sea homotópica a la extensión de la primera.
5. Probar que la composición de cofibraciones es cofibración, los homeos son cofibraciones y que las cofibraciones son estables por cambio de cobase.
6. Probar que las cofibraciones son funciones inyectivas.
7. Sea A un subespacio cerrado de X . Probar que la inclusión es una cofibración si y sólo si $X \times 0 \cup A \times I$ es un retracto de $X \times I$.
8. Probar que, si X es un espacio Hausdorff e $i : A \rightarrow X$ es una cofibración, entonces A es un subespacio cerrado de X .
9. Sea X espacio topológico y sean X_1, X_2 subespacios cerrados de X tal que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $A \subset X$ tal que $X_1 \cap X_2 \subset A$. Probar que, si las inclusiones $A \cap X_1 \subset X_1$ y $A \cap X_2 \subset X_2$ son cofibraciones, entonces también lo es $A \subset X$.
10. Probar que la inclusión en la base del cono $i : X \rightarrow CX$ es una cofibración. En particular, la inclusión $i : S^n \rightarrow D^{n+1}$ es cofibración.
11. Sea $A \subset X$ una cofibración con A contráctil. Probar que la función cociente $q : X \rightarrow X/A$ es equivalencia homotópica.
12. Sea $i : A \rightarrow X$ una cofibración y sean $f, g : A \rightarrow Y$ funciones continuas homotópicas. Probar que los espacios de adjunción $X \cup_f Y$ y $X \cup_g Y$ son equivalentes homotópicos relativos a Y .
13. Sean (X, A) e (Y, A) cofibraciones y sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica tal que $f|_A = id$. Probar que f es una equivalencia homotópica relativa a A .
14. Si (X, A) es una cofibración y la inclusión $i : A \rightarrow X$ es equivalencia homotópica, entonces A es un retracto por deformación fuerte de X .
15. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Probar que la inclusión $j : X \rightarrow Z_f$ es una cofibración.
16. Probar que una función continua $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si y sólo si X es retracto por deformación del cilindro Z_f . Deducir entonces que dos espacios X e Y tienen el mismo tipo homotópico si y sólo si ambos son retractos por deformación de algún espacio Z .
17. Probar que, si (X, A) es una cofibración y $f : A \rightarrow B$ es una equivalencia homotópica entonces la función natural $\tilde{f} : X \rightarrow X \cup_f B$ es una equivalencia homotópica.

18. Probar que la composición de fibraciones es una fibración, los homeos son fibraciones y las fibraciones son estables por cambio de base.
19. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración. Probar que existe una función continua
- $$\phi : E \times_B B^I = \{(e, \omega) \in E \times B^I, p(e) = \omega(0)\} \rightarrow E^I$$
- tal que $\phi(e, \omega)(0) = e$ y $p\phi(e, \omega)(t) = \omega(t)$.
 Recíprocamente, dada $p : E \rightarrow B$ continua, si existe ϕ como arriba, entonces p es fibración.
20. Sea $p : E \rightarrow B$ fibración y supongamos que B es arco conexo. Dados dos puntos b_0 y b_1 en B , probar que las fibras $F_0 = p^{-1}(b_0)$ y $F_1 = p^{-1}(b_1)$ son homotópicamente equivalentes.
21. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración.

- a) Si B es contráctil y $F = p^{-1}(b)$ es la fibra en algún punto $b \in B$, probar que existe una equivalencia homotópica $\phi : E \rightarrow B \times F$ tal que $\pi\phi = p$, donde $\pi : B \times F \rightarrow B$ es la proyección.

Nombre: Decimos en este caso, que la fibración $p : E \rightarrow B$ es homotópicamente trivial.

- b) Si $p : E \rightarrow B$ es homotópicamente trivial y $A \subset B$ es una cofibración, entonces la fibración inducida $p_A : p^{-1}(A) \rightarrow A$ es homotópicamente trivial.