

Teoría de Homotopía 2006

Práctica Cuatro

Grupos de Homotopía.

Notaciones. Dados dos espacios punteados X e Y , notaremos con $C(X, Y)$ al conjunto de funciones continuas y punteadas de X a Y y con $[X, Y]$ al conjunto de clases homotópicas de funciones punteadas (donde las homotopías respetan también los puntos base). Notaremos con X^Y al espacio de funciones continuas y punteadas de Y a X con la topología del subespacio de la compacto-abierto. Dado un espacio punteado X notaremos con ΣX a la suspensión reducida $\Sigma X = S^1 \wedge X$.

1. Probar, utilizando la ley exponencial para espacios topológicos, la ley exponencial para espacios punteados y su versión homotópica: Dados X, Y, Z espacios punteados, con Y localmente compacto y Hausdorff, se tienen biyecciones naturales

$$C(X \wedge Y, Z) \simeq C(X, Z^Y) \quad [X \wedge Y, Z] \simeq [X, Z^Y]$$

2. Probar que $\Sigma S^n = S^{n+1}$. Calcular ΣD^n .
3. Sea P un espacio punteado. Probar que, si $[X, P]$ es un grupo para todo espacio punteado X y $f^* : [X, P] \rightarrow [Y, P]$ es morfismo de grupos para toda $f : Y \rightarrow X$ continua, entonces P resulta un H-grupo. Más aún, para todo X , la estructura de grupo de $[X, P]$ coincide con la estructura usual.
4. Probar que todo espacio con el mismo tipo homotópico de un H-grupo es un H-grupo.
5. Sean P y P' H-grupos. Un morfismo de H-grupos $f : P \rightarrow P'$ es una función continua tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P \times P & \xrightarrow{\mu} & P \\ f \times f \downarrow & & \downarrow f \\ P' \times P' & \xrightarrow{\mu'} & P' \end{array}$$

es homotópicamente conmutativo, donde μ y μ' son las operaciones de P y P' .

Probar que una función continua $f : P \rightarrow P'$ es un morfismo de H-grupos si y sólo si la función $f_* : [X, P] \rightarrow [X, P']$ es un morfismo de grupo para todo espacio punteado X .

6. Sea K un H-cogruppo y P un H-grupo. Probar que las estructuras de grupo inducidas por K y P en $[K, P]$ coinciden y que $[K, P]$ resulta un grupo abeliano.
7. Sea X un espacio topológico y sea $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que son equivalentes:
 - a) X es n -conexo.
 - b) Si $m \leq n$, toda función continua $f : S^m \rightarrow X$ es homotópica a una constante.
 - c) Si $m \leq n$, toda función continua $f : S^m \rightarrow X$ se extiende continuamente a una función $\bar{f} : D^{m+1} \rightarrow X$.
8. Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos arco conexos y sea $\prod X_i$ el producto. Probar que $\pi_n(\prod X_i) = \prod \pi_n(X_i)$.
9. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento y sean $b_0 \in B$ y $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Probar que

$$p_* : \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 2$. (Sugerencia: usar que S^n es simplemente conexo para $n \geq 2$ y las propiedades de levantamiento de los revestimientos).

10. Deducir del ejercicio anterior que $\pi_n(S^1) = 0$ para $n \geq 2$ y calcular los grupos de homotopía del toro n -dimensional.

11. Sea (X, A) un par topológico, $x_0 \in A$ y $s_0 \in S^{n-1}$. Probar que una función $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ representa la clase del cero en $\pi_n(X, A, x_0)$ si y sólo si f es homotópica relativa a S^{n-1} a una función cuya imagen está contenida en A .
12. Sea (X, A) un par topológico y $x_0 \in A$.
- Probar que existe un morfismo $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$ inducido por las restricciones de las funciones $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ a S^{n-1} .
 - Probar que la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$
donde $i : A \rightarrow X$ y $j : (X, x_0) \rightarrow (X, A)$ son las inclusiones.
13. Sea X un espacio arco conexo y CX el cono de X . Probar que $\pi_n(CX, X, x_0) = \pi_{n-1}(X, x_0)$ para todo $n \geq 1$.
14. Probar que, si $A \subset X$ es un retracto, entonces existe un isomorfismo
$$\pi_n(X, x) \simeq \pi_n(A, x) \oplus \pi_n(X, A, x) \quad n \geq 2.$$
15. Sean X, Y espacios punteados. Probar que para todo $n \geq 2$ existe un isomorfismo
$$\pi_n(X \vee Y) \simeq \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y)$$
16. Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica. Probar que
$$f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$$
es un isomorfismo para todo n y todo $x \in X$. (Sugerencia: Si $g : Y \rightarrow X$ es una inversa homotópica de f , entonces $g_* f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, gf(x))$ es iso).