

Teoría de Homotopía 2006

Práctica Cinco

CW-complejos

Parte Uno: Preliminares.

1. Describir estructuras celulares para la esfera n -dimensional, los discos n -dimensionales y el toro.
2. Probar que el interior de toda celda principal de un CW-complejo es abierto.
3. Comprobar que los poliedros son CW-complejos con estructura celular inducida por la estructura simplicial.
4. Sea X un CW-complejo, Y un espacio topológico y $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que son equivalentes:
 - a) $f : X \rightarrow Y$ es continua.
 - b) La restricción $f : e_\alpha^n \rightarrow Y$ es continua para toda celda e_α^n .
 - c) $f \circ f_\alpha^n : D^n \rightarrow Y$ es continua para toda celda e_α^n , donde $f_\alpha^n : D^n \rightarrow e_\alpha^n$ es la función característica de la celda.
5. Sea X un CW-complejo. Probar que $H : X \times I \rightarrow Y$ es continua si y sólo si todas las restricciones $H : e_\alpha^n \times I \rightarrow Y$ lo son.
6. Sea A un subcomplejo de un CW-complejo X . Probar que A es cerrado en X .
7. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Probar que la base define una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}^n$ tomando como k -esqueleto al conjunto

$$(\mathbb{R}^n)^k = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i v_i \mid s_i \in \mathbb{R} \text{ y } s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n - k \text{ índices } i \right\}$$

8. Sea K una estructura celular en X y L una estructura celular en Y . Probar que

$$K \times L = \{e_\alpha^n \times e_\beta^m \mid e_\alpha^n \in K, e_\beta^m \in L\}$$

es una estructura celular en $X \times Y$.

9. Probar que si X e Y son CW-complejos e Y es localmente compacto entonces $X \times Y$ es un CW-complejo. En particular, si X es un CW-complejo entonces $X \times I$ también lo es. Describir la estructura celular de $X \times I$ en función de la estructura celular de X .
10. Sea (X, A) un CW-complejo relativo. Probar que X/A es un CW-complejo.
11. Sea Y un espacio topológico. Probar que Y es contráctil si y sólo si para toda cofibración $i : A \rightarrow X$ y toda función continua $f : A \rightarrow Y$ existe una extensión continua $\bar{f} : X \rightarrow Y$ tal que $\bar{f}i = f$. En particular, si (X, A) es un CW-complejo relativo e Y es un espacio contráctil, toda función continua $f : A \rightarrow Y$ se extiende continuamente a X .
12. Sea (X, A) un CW-complejo relativo y sea $a \in A$. Probar que si A es fuertemente contráctil (es decir, la inclusión del punto a en A es un retracto por deformación fuerte), entonces la proyección

$$p : (X, A) \rightarrow (X/A, *)$$

es una equivalencia homotópica.

Parte Dos: Comienza el show.

13. Probar que si X se obtiene de A adjuntando una n -celda e^n y x es un punto en el interior de la n -celda, entonces A es un retracto por deformación fuerte de $X - \{x\}$.
14. Enunciar y probar las versiones relativas y de pares del Teorema de Aproximación Celular.
15. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo celular entre CW-complejos. Probar que el cilindro Z_f es un CW-complejo.
16. Sea (X, A) un CW-par n -conexo. Probar que existe un CW-par (Z, A) tal que $(Z, A) \simeq (X, A)$ relativo a A y tal que $Z - A$ no tiene celdas de dimensión menor a n . En particular, dado (X, x_0) un CW-complejo punteado n -conexo, existe un CW-complejo punteado (X', x'_0) homotópicamente equivalente a (X, x_0) tal que $(X')^n = x'_0$.
17. Sean X e Y CW-complejos del mismo tipo homotópico y sean X^n e Y^n sus n -esqueletos. Probar que, si X e Y no tienen celdas de dimensión $n + 1$, entonces X^n e Y^n también tienen el mismo tipo homotópico.
18. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ espacios punteados, recordar que el producto smash se define como

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

donde la unión en un punto $X \vee Y$ es considerada como el subespacio de $X \times Y$ formado por los puntos de la forma (x, y_0) y (x_0, y) . Recordar también que, si X e Y son CW-complejos, entonces $X \wedge Y$ es un CW-complejo (si uno de los dos es localmente finito se toma la topología producto. Si no se le impone a $X \wedge Y$ la topología débil inducida). Sea X un CW-complejo n -conexo e Y un CW-complejo m -conexo. Probar que $X \wedge Y$ es un CW-complejo $(n + m + 1)$ -conexo. (Sugerencia: ejercicio anterior).

19. Recordar que la suspensión (reducida) de un espacio punteado (X, x_0) se obtiene del cilindro $X \times I$ identificando las dos tapas y todos los puntos (x_0, t) en un mismo punto. Notar que la suspensión (reducida) ΣX es homeomorfa al producto smash $S^1 \wedge X$. Deducir del ejercicio anterior que si X es un CW-complejo n -conexo entonces ΣX es un CW-complejo $(n + 1)$ -conexo.
20. Sea X un CW-complejo n -conexo e Y un CW-complejo m -conexo y supongamos que X o Y es localmente finito. Probar que las inclusiones $i : X \rightarrow X \vee Y$, $j : Y \rightarrow X \vee Y$ inducen isomorfismos

$$(i_*, j_*) : \pi_r(X, x_0) \oplus \pi_r(Y, y_0) \rightarrow \pi_r(X \vee Y, *)$$

para $2 \leq r \leq n + m$. (Sugerencia: $(X \times Y, X \vee Y)^{n+m+1} = X \vee Y$).

21. Deducir del ejercicio anterior que

$$\pi_n(\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n, *) = \bigoplus_{\alpha} \pi_n(S_{\alpha}^n, s_0)$$

para $n \geq 2$ (Sugerencia: para finitos índices α se tiene el ejercicio anterior, para infinitos índices usar que toda función continua $f : S^n \rightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ tiene imagen compacta).

22. Sean X, Y espacios topológicos y sean (X', f) e (Y', g) CW-aproximaciones de X e Y . Probar que si $h : X \rightarrow Y$ es continua, entonces existe un morfismo celular $h' : X' \rightarrow Y'$ tal que el siguiente diagrama homotópicamente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h'} & Y' \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

es decir, $gh' \simeq hf$.

23. Deducir del ejercicio anterior que todas las CW-aproximaciones de un espacio X son homotópicamente equivalentes.
24. Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia débil. Probar que para todo CW-complejo Z , el morfismo $f_* : [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ es isomorfismo.
25. Sea X un CW-complejo que es la unión de una familia

$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \dots$$

de subcomplejos tales que las inclusiones $i_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$ son nullhomotópicas. Probar que X es contráctil. Deducir que la esfera infinita S^∞ es contráctil y más generalmente, la suspensión infinita $\Sigma^\infty Y$ de cualquier CW-complejo Y es contráctil (la suspensión infinita es la unión topológica de todas las suspensiones iteradas de Y).

26. Decimos que dos espacios X e Y son débilmente equivalentes (y notamos $X \simeq_w Y$) si existe una sucesión finita $X_0 = X, X_1, \dots, X_r = Y$ de espacios y equivalencias débiles $X_i \rightarrow X_{i+1}$ ó $X_{i+1} \rightarrow X_i$. Probar que $X \simeq_w Y$ si y sólo si admiten una CW-aproximación en común (i.e. existe un CW-complejo Z que aproxima a ambos).

Parte Tres: Ejercicios Difíciles.

27. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo (abeliano en el caso $n \geq 2$). Probar que existe un CW-complejo arco conexo X tal que

$$\pi_r(X) = \begin{cases} G & r = n \\ 0 & r \neq n \end{cases}$$

Nombre: En ese caso X se llama un *complejo de Eilenberg-MacLane* y se lo denota $K(G, n)$.

28. a) Sea X un CW-complejo $(n-1)$ -conexo tal que $\pi_n(X) = G$ y sea Y un espacio arco conexo tal que

$$\pi_r(Y) = \begin{cases} H & r = n \\ 0 & r > n \end{cases}$$

Sea $\phi : G \rightarrow H$ un morfismo de grupos. Probar que existe una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ es el morfismo ϕ . Más aún, f es única salvo homotopía.

- b) Deducir del item anterior que los $K(G, n)$ (para n y G fijos) son únicos salvo equivalencias homotópicas.

29. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre CW-complejos arco conexos. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, la función f se puede factorizar via $X \rightarrow Z_n \rightarrow Y$ donde la primera función induce isomorfismos en los π_i para $i \leq n$ y la segunda induce isomorfismos en π_i para $i \geq n+1$.