

Teoría de Homotopía 2006
 Práctica Seis
 Teoría de Homotopía Simple (Parte I)

Notaciones y observaciones. Todos los CW-complejos en esta práctica se suponen finitos. Notaremos con $K \searrow^e L$ (resp. $K \nearrow^e L$) a los colapsos (expansiones) elementales, con $\searrow$ y $\nearrow$ a los colapsos y expansiones y con $K/\searrow L$ si K y L tienen el mismo tipo homotópico simple. Dada $f : K \rightarrow L$ celular, notaremos con Z_f al cilindro (que resulta un CW-complejo por ser f celular). Si K es subcomplejo de L notaremos $K < L$.

1. Sea $f : K \rightarrow L$ celular y supongamos que $K \searrow K_0$. Probar que $Z_f \searrow K \cup Z_{f|_{K_0}}$.
2. Sean $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow T$ celulares. Probar que $Z_{gf}/\searrow Z_g \cup_L Z_f \text{ rel } (K \cup T)$.
3. Supongamos que $K \searrow L$. Probar que cualquier sucesión de colapsos elementales puede ser reordenada para obtener una sucesión de la forma $K = K_0 \searrow^e K_1 \searrow^e \dots \searrow^e K_r = L$ tal que $K_i = K_{i+1} \cup e^{n_i} \cup e^{n_i+1}$ con $n_0 \geq n_1 \geq \dots \geq n_{r-1}$.
4. Sea K un CW-complejo contráctil de dimensión 1 y sea x una 0-celda de K . Probar que $K \searrow x$.
5. Probar que, si $K \searrow x$ para alguna 0-celda, entonces $K \searrow y$ para cualquier 0-celda $y \in K$.
6. Supongamos que $K/\searrow L$. Probar que existen CW-complejos P y L' con L' isomorfo (como CW-complejo) a L y tal que $K \nearrow P \searrow L' = L$ (i.e. esencialmente se pueden hacer primero las expansiones y después los colapsos).
7. (Teorema de Extensión de Homotopía Simple.) Sea $K_0 < K$ y $f : K_0 \rightarrow L_0$ una equivalencia homotópica simple celular. Entonces la función natural inducida $g : K \rightarrow K \cup_f L_0$ es una equivalencia homotópica simple (y por lo tanto $K/\searrow K \cup_f L_0$). Más aún, si $X < K_0 < K$ y $f|_X = 1_X$, entonces $K/\searrow K \cup_f L_0 \text{ rel } X$.
8. Sea $f : L \rightarrow M$ celular. Probar que $f_* : Wh(L) \rightarrow Wh(M)$, definida por $f_*([K, L]) = [K \cup_f M, M]$ es morfismo de grupos.
9. Sean K, L, M subcomplejos del complejo $K \cup L$, con $M = K \cap L$ y tal que $M \subset K$ es retracto por deformación fuerte. Probar que $[K \cup L, L] = j_*[K, M]$ donde $j : M \rightarrow L$ denota la inclusión.
10. Supongamos que $M \subset L \subset K$ son retracts por deformaciones fuertes de CW-complejos y que $i : M \rightarrow L$ es la inclusión. Probar que $[K, M] = [L, M] + (i_*)^{-1}[K, L]$.