Teoría de Homotopía 2006
Práctica Siete
Teoría de Homotopía Simple (Parte II)

1. Sea G un grupo, g un elemento cualquiera de G y sea $f : G \rightarrow G$ el isomorfismo $f(x) = gxg^{-1}$. Probar que $f_* : Wh(G) \rightarrow Wh(G)$ es la identidad.
2. Sea R un anillo conmutativo, T un subgrupo de las unidades de R y sea $SL(R)$ el subgrupo de $GL(R)$ de matrices de determinante 1. Sea $SK_1(R) = \tau(SL(R)) \subset K_T(R)$. Probar que $SK_1(R)$ es independiente de T (de hecho es isomorfo a $SK_1(R) \subset K_1(R)$).
3. Sea $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de R -complejos. Probar que, si C'' es libre y acíclico, entonces existe una sección (como complejos) $s : C'' \rightarrow C$, por lo tanto la sucesión se parte (como sucesión de complejos) y resulta $C = C' \oplus C''$.
4. Sea (C_*, d) un (R, T) -complejo acíclico y sean δ, δ' dos contracciones. Denotamos como siempre $B_i = d(C_{i+1})$. Supongamos que B_i y B_{i-1} son libres con bases β_i, β_{i-1} y sea $\mathcal{C}$ base preferencial de C_i . Probar que $\tau(C(\mathcal{C}, \beta_i \cup \delta\beta_{i-1})) = \tau(C(\mathcal{C}, \beta_i \cup \delta'\beta_{i-1}))$.
5. Sea (C_*, d) un (R, T) -complejo acíclico y sea δ una contracción que cumple $\delta^2 = 0$. Probar que C es simplemente equivalente a un complejo de la forma $0 \rightarrow C'_m = C^{imp} \rightarrow C'_{m-1} = C^{par} \rightarrow 0$ (para algún natural impar m).
6. Sea (C_*, d) un $Wh(G)$ -complejo acíclico. Supongamos que existe una base preferencial de C_* para la cual la matriz de d en esa base es una matriz con coeficientes enteros (i.e. $\langle d_i \rangle = (a_{ij})$ con $a_{ij} \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}G$). Probar que $\tau(C) = 0$.
7. Sea (K, L) un CW-par finito y conexo homotópicamente trivial. Sean $p : \tilde{K} \rightarrow K$ y $\hat{p} : \hat{K} \rightarrow K$ revestimientos universales de K . Sean $x, y \in K$ y sean $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e $\hat{y} \in \hat{p}^{-1}(y)$. Sean $\tilde{G} = Cov(\tilde{K})$ y $\hat{G} = Cov(\hat{K})$ y sean $\phi : \tilde{G} \rightarrow \pi_1(K, x)$ y $\psi : \hat{G} \rightarrow \pi_1(K, y)$ los isomorfismos naturales de siempre (inducidos por $x, y, \tilde{x}, \hat{y}$). Probar que $\psi_*(\tau(C(\hat{K}, \hat{L}))) = f_{xy}(\phi_*(\tau(C(\tilde{K}, \tilde{L}))))$.