Teoría de Números - Práctica 2
2do. Cuatrimestre 2005
Divisibilidad y Teorema de Dirichlet

(1) Sea K un cuerpo de números, $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros y I un ideal no nulo. Probar que $\mathcal{N}(I)$ divide a $\mathcal{N}(\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. En particular $\mathcal{N}(I) \mid \gcd\{\mathcal{N}(\alpha) \, : \, \alpha \in I\}$.

(2) Sea K un cuerpo de números, $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros y I un ideal fraccionario no nulo. Sea $J := \{\alpha \in K \, : \, \alpha I \subset \mathcal{O}_K\}$. Probar que $IJ = \mathcal{O}_K$. Deducir que $J = I^{-1}$.

(3) Calcular el número de clases, unidades y anillo de enteros de los cuerpos $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{15}]$.

(4) Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-17}]$ y $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$.
- Verificar que si $\mathfrak{p}_1 = \langle 2, 1+\sqrt{-17}\rangle$, $\mathfrak{p}_2 = \langle 3, 1+\sqrt{-17}\rangle$ y $\mathfrak{p}_3 = \langle 3, 1-\sqrt{-17}\rangle$ entonces $\langle 2\rangle = \mathfrak{p}_1^2$, $\langle 3\rangle = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$.
- Descomponga en primos $\langle 1 \pm \sqrt{-17}\rangle$ y $\langle 18\rangle$.
- Hallar todos los ideales $\mathfrak{a} \in \mathcal{O}_K$ con $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) = 18$.

(5)
- Probar que el ideal $\langle 2, x\rangle$ en $\mathbb{Z}[x]$ no es principal.
- Probar el Lema de Gauss: si $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ y n (respetivamente m) es el máximo común divisor de los coeficientes de f (resp. de g) entonces mn es el máximo común divisor de los coeficientes de fg.
- Deducir que si f es irreducible sobre $\mathbb{Z}$ entonces lo es sobre $\mathbb{Q}$.
- Supongamos que $f \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio irreducible. Probar que si $f \mid gh$ en $\mathbb{Z}[x]$ entonces $f \mid g$ ó $f \mid h$. Deducir que $\mathbb{Z}[x]$ es un DFU.
- ¿Quienes son los ideales primos de $\mathbb{Z}[x]$?

(6) Sea K un cuerpo de números y $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros. Probar que $\mathcal{O}_K$ es un DFU si y sólo si $\mathcal{O}_K$ es un DIP.

(7) Hallar "todas" las soluciones de los elementos $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tales que $\alpha \equiv 1+\sqrt{-5} \mod \langle 1+\sqrt{-5}, 3\rangle$ y $\alpha \equiv 2-\sqrt{-5} \mod \langle 3-\sqrt{-5}, 7\rangle$.

(8) Sea K un cuerpo de números y $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros. Enunciar y demostrar el Teorema Chino del Resto para un sistema de ideales $I_1, \ldots, I_r$ de $\mathcal{O}_K$ no necesariamente coprimos entre ellos.

(9) Hallar la factorización de los primos racionales en los cuerpos indicados:
- 2, 3, 5 y 7 en el anillo de enteros de $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
- 3, 5 y 7 en el anillo de enteros del cuerpo $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}]$.
- 11, 13 en el anillo de enteros de $K = \mathbb{Q}[\sqrt{7}, \sqrt{10}]$. Se puede probar que el anillo de enteros de K no esta generado por las potencias de ningún elemento (ver ejercicio 30, página 46 de Marcus para una sugerencia). ¿Se puede decir algo de la factorización del 7?