

Teoría de Números - Práctica 4

2do. Cuatrimestre 2005

- (1) Sea K un cuerpo de números, $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal.
 - Probar que existe una extensión finita L de K tal que $\mathfrak{a}$ se vuelve principal en L . (Hint: si h es el número de clases de $\mathcal{O}_K$, que se puede decir de $\mathfrak{a}^h$?)
 - Probar que existe una extensión finita L de K tal que todo ideal de K se vuelve principal en L . (esto NO quiere decir que L tiene número de clases 1).
 - Hallar una extensión de grado 4 sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{-21}]$ tal que todo ideal de $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$ se vuelva principal.
- (2) Sea G un subgrupo (aditivo) de $\mathbb{R}^m$ tal que todo subconjunto de G acotado es finito. Vamos a probar que G es un retículo.
 - Sea Λ un retículo de dimensión maximal (i.e. un $\mathbb{Z}$ -módulo generado por elementos $\mathbb{R}$ -independientes) contenido en G (existe porque $\{0\} \subset G$). Probar que G está contenido en el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por Λ .
 - Sea F un paralelepípedo fundamental para Λ (i.e. si $\Lambda = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, $F = \{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq a_i < 1 \}$). Probar que cada coclase $v + \Lambda$, $v \in G$ tiene un representante en F . Deducir que G/Λ es finito.
 - Probar que $rG \subset \Lambda$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Concluir que rG es un grupo abeliano libre de rango menor o igual que d (donde d es el rango de Λ).
 - Probar que G es un grupo abeliano libre de rango d .
 - Sea B una $\mathbb{Z}$ -base de G . Probar que sus elementos son $\mathbb{R}$ -independientes. Concluir que G es un retículo. (esto concuye la demostración del Teorema de Unidades)
- (3) Si f y g son dos funciones aritméticas (i.e. $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$), definimos su convolución (y notada $f * g$) como

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Probar que $f * g = g * f$ (conmutativa) y $f * (g * h) = (f * g) * h$ (asociativa).

- (4) Sea I la función $I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$. Probar que $f * I = I * f = f$.
- (5) Probar que si f es una función aritmética y $f(1) \neq 0$, entonces existe una única función f^{-1} tal que $f * f^{-1} = I$. (hint: $f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} + \sum_{d|n, d < n} f\left(\frac{n}{d}\right)f^{-1}(d)$)
- (6) (**Fórmula de inversión de Frobenius**) Sea μ la función de Möbius dada por

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = p_1 \dots p_k \text{ primos distintos} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Probar que si $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ entonces $g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu(\frac{n}{d})$ (equivalentemente, si 1 denota la función $1(n) = 1$, entonces $1 * \mu = I$).

(7) Probar que $\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$.

(8) Probar que $\sum_n \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, donde φ denota la función de Euler.

(9) Definamos la función de Mangoldt como

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^r \text{ con } r \geq 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Probar que $\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta'(s-1)}{\zeta(s)}$.

(10) Sea $L(s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}$ una serie de Dirichlet convergente para $\Re(s) > s_0$ y tal que $L(s) = 0$ para todo s con $\Re(s) > s_0$. Probar que $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (deducir que si dos series de Dirichlet coinciden en un semiplano, sus coeficientes son iguales).