Medida e Integración.

Ejercicio 1 Sean E un espacio $\mu-$medible de medida finita y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mu-$medibles de E a $[-\infty,\infty]$. Supongamos que $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para $\mu-$a.e. $x\in E$. Probar que para todo $\varepsilon>0$, existe un conjunto medible $E_\varepsilon\subset E$ y un número positivo k_ε tal que

$$\mu(E\setminus E_\varepsilon)\le\varepsilon \quad \text{y} \quad |f_n|\le k_\varepsilon \text{ en } E_\varepsilon \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ejercicio 2 Sea $E\subset\mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n-$medible y acotado y sea $\mathcal{F}$ un cubrimiento de Vitali para E. Probar que para todo $\varepsilon>0$ existe una familia de cubos

$$\mathcal{F}_\varepsilon\equiv\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_{n_\varepsilon}\}\quad (Q_n\in\mathcal{F})$$

con interiores disjuntos de a pares tal que

$$\sum\mathcal{L}^n(Q_n)-\varepsilon\le\mathcal{L}^n(E)\le\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon}E\cap Q_n\right)+\varepsilon.$$

Ejercicio 3 Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mu-$medibles de E a $[-\infty,\infty]$. Probar que, si $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finita $\mu-$a.e. en E, entonces existe una sucesión de números positivos $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_nk_n^{-1}\to 0$ $\mu-$a.e. en E.

Ejercicio 4 Sean μ una medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ invariante por traslaciones y $A\subset\mathbb{R}^N$ $\mu-$medible con $\mu(A)>0$. Entonces existe $\varepsilon>0$ tal que

$$B(0,\varepsilon)\subset A-A=\{a-b:a,b\in A\}.$$

Ejercicio 5 Sea $E\subset\mathbb{R}$ un conjunto medible Lebesgue, sea

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{|E\cap[-n,n]|}{2n}\right).$$

(a) Probar que μ es una medida de probabilidad.

(b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ medible Lebesgue, $f\ge 0$. Probar que

$$\int_{\mathbb{R}}f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{\int_{-n}^{n}f\,dx}{2n}\right).$$

Ejercicio 6 Sean $g,\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu-$sumable y $f,\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu-$ medibles. Supongamos $|f_n|\le g_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, $f_n\to f$ $\mu-$a.e., $g_n\to g$ $\mu-$a.e. y

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu=\int g\,d\mu.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|\,d\mu=0.$$

Ejercicio 7 Sean f una función $\mu-$medible y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sucesión de funciones $\mu-$medibles tales que $f_n \to f$ en medida. Probar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\limsup \mu(f_n > t) &\leq \mu(f > t - \varepsilon),\\ \liminf \mu(f_n > t) &\geq \mu(f > t + \varepsilon).\end{aligned}$$

Concluir que $\mu(f_n > t) \to \mu(f > t)$ solamente en los valores de t donde la función distribución de f es continua.

Ejercicio 8 Sea μ una medida sobre X y $f : X \to [0, \infty]$ $\mu-$medible. Entonces

$$\int_X |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(f > t) \, dt.$$

Ejercicio 9 Sea $f : E \to \mathbb{R}$ $\mu - medible$ tal que $\mu(f < t) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado $G > 0$ definimos una clase de funciones medibles sobre E por

$$\mathcal{C} = \left\{ g : 0 \leq g(x) \leq 1 \text{ for all } x \text{ and } \int_E g \, d\mu = G \right\}.$$

Probar que el problema de minimización

$$I = \inf_{g\in\mathcal{C}} \int_E fg \, d\mu.$$

se resulve con

$$g(x) = \chi_{\{f<s\}}(x) + c\chi_{\{f=s\}}(x)$$

donde

$$s = \sup\{t : \mu(f < t) \leq G\},$$
$$c\mu(f = s) = G - \mu(f < s).$$

Ejercicio 10 Sea μ la medida definida en el Ejercicio 5.

(a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible Lebesgue, se define la medida en los Borelianos de $\mathbb{R}$ como, $\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A))$. Sea $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ medible Borel tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\int_{-n}^n fg \, dx = n$ probar que

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_f = \frac{1}{2}.$$

(b) Para cada $E \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue y $x \in \mathbb{R}$, sea $\mu_x(E) = \mu(E + x)$. Probar que, $\mu_x << \mu$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que

$$\frac{d\mu_x}{d\mu}(y) = \frac{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n 2n} \chi_{[-n,n]}(y + x)}{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n 2n} \chi_{[-n,n]}(y)}.$$

Ejercicio 11 Sean ν y μ dos medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^N$, con $\nu << \mu$. Si g es $\nu-$ integrable, $g(D_\mu \nu)$ es $\mu-$integrable probar que

$$\int_E g \, d\nu = \int_E g D_\mu \nu \, d\mu$$

para todo $E \subset \mathbb{R}^N$ $\mu-$medible.

Ejercicio 12 Si μ, ν y η son medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^N$.

(a) Si μ y ν son absolutamente continuas con respecto a η, probar que

$$D_\eta(\mu + \nu) = D_\eta \mu + D_\eta \nu \quad \eta - a.e.$$

(b) Si $\nu << \mu$ y $\mu << \eta$, demostrar que

$$D_\eta \nu = D_\mu \nu D_\eta \mu \quad \eta - a.e.$$

(c) Si μ y ν son mutuamente absolutamente continuas y no son identicamente cero, mostrar que

$$D_\mu \nu \neq 0 \quad \text{y} \quad D_\nu \mu = D_\mu \nu^{-1}.$$