Funciones de Variación Acotada.

Ejercicio 1 Sea $u \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$

(a) Si ρ es un núcleo de convolución y $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(\text{x}, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ entonces

$$\nabla(u * \rho_\varepsilon) = Du * \rho_\varepsilon \quad \text{en } \Omega_\varepsilon.$$

(b) Si $Du = 0$, u es constante en cualquier componente conexa de Ω.

Ejercicio 2 Sean $u \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Probar que $u\psi \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ y

$$D(u\psi) = \psi Du + u\nabla\psi.$$

Ejercicio 3 Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in BV(\Omega)$ una sucesión tal que $u_n \to u$ en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|Du_n\|(\Omega) = \|Du\|(\Omega).$$

Probar los siguiente

(a) Para todo $U \subset \Omega$ abierto se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \|Du_n\|(U \cap \Omega) \le \|Du\|(\overline{U} \cap \Omega).$$

(b) Si $U \subset \Omega$ abierto y $\|Du\|(\partial U) = 0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|Du_n\|(U) = \|Du\|(U).$$

Ejercicio 4 Si Ω es un abierto acotado y $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de perímetro finito en Ω tal que $\sup_n \|\partial E_n\|(\Omega) < \infty$. Probar que existe una subsucesión $\{E_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un conjunto E de perimetro finito tal que

$$\chi_{E_{n_j}} \to \chi_E \quad \text{en } \mathrm{L}^1(\Omega)$$

y

$$\|\partial E\|(\Omega) \le \liminf_{j\to\infty} \|\partial E_{n_j}\|(\Omega).$$

Ejercicio 5 Demostrar, con técnicas elementales, el teorema de Blow-Up para la frontera reducida en el caso que $E \subset \mathbb{R}^N$ tiene una frontera de clase C^1.

Ejercicio 6 Probar que existen conjuntos de perímetro finito en Ω que son soluciones de los problemas de minimización

$$\min\Big\{\|\partial E\|(\Omega) : \mathcal{L}^N(E) = c\Big\} \quad \text{y} \quad \min\Big\{\|\partial E\|(\Omega) + \int_E g\,dx\Big\},$$

donde $0 \le c \le \mathcal{L}^N(\Omega)$ y $g \in L^1(\Omega)$.

Ejercicio 7 Sean $E \subset \Omega$ de perímetro finito y $C \subset \Omega$ tal que $\mathcal{H}^{N-1}(C) = 0$. Probar que $\|\partial E\|(C) = 0$.

Ejercicio 8 Sea $u \in BV(\Omega)$ y $C \subset \Omega$ tal que $\mathcal{H}^{N-1}(C) = 0$. Probar que $\|Du\|(\Omega) = 0$.

Ejercicio 9 Sea $u \in L^1(\Omega)$. Probar que

$$\|Du\|(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1}(B \cap \partial^*\{u > t\})\, dt$$

para todo $B \subset \Omega$ boreliano.

Ejercicio 10 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Probar que $u \in BV(a, b)$ si y solo si

$$\text{ess } V_a^b(u) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \right\} < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones del (a, b) y cada t_j es un punto de continuidad aproximada de u.

Ejercicio 11 Sean $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $k \in \{1, \ldots, N\}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $x' = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ y $t \in (a, b)$, mostrar que

$$x' \to \text{ess } V_a^b f_k$$

es $\mathcal{L}^{N-1}$ medible, donde $f_k(x', t) = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_N)$.

Ejercicio 12 Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Probar que $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si y solo si

$$\int_K \text{ess } V_a^b f_k < \infty$$

para todo $k = 1, \ldots, N$, $a < b$ y $K \subset \mathbb{R}^{N-1}$ compacto.