Funciones de Sobolev.

Ejercicio 1 Mostrar que

(a) $f(x) = |x| \in W^{1,p}(a,b)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y para todo intervalo acotado (a,b) de $\mathbb{R}$.

(b) $g(x) = |x|^\alpha \in H^1(-1,1)$ si y solo si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

(c) $h(x) = \chi_{[0,1]}(x) \notin W^{1,p}(-1,1)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.
Concluir que toda función que tiene un salto en un punto en $\mathbb{R}$ no pertenece a $W^{1,p}$.

(d) $v(x) = |\ln|x||^k \in H^1(B(0,R))$ con $B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$ y $R > 0$ si y solo si $0 < k < \dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 2 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto.

(a) Probar que si $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y

$$\int_\Omega f\phi\, dx = \int_\Omega g\phi\, dx \quad \forall \phi \in C^1_c(\Omega)$$

entonces $f = g$ $c.t.p$ en Ω.

(b) Mostrar que la derivada de debil de una función de Sobolev es unica.

Ejercicio 3 Sea $1 < p < \infty$. Probar que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

es acotado para todo $h \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Probar que $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$ y $k \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 5 Probar que $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = W^{k,p}_0(\mathbb{R}^N)$.

Ejercicio 6 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Definimos, para todo $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \colon \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, $\eta_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^N}\eta\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ donde η es el nucleo regularizante standar y para $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ definimos $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$. Probar que

(a) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.

(b) Si $f \in C(\Omega)$, entonces $f^\varepsilon \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

(c) $f^\varepsilon(x) \to f(x)$ si x es un punto de Lebesgue de f; en particular, $f^\varepsilon \to f$ $c.t.p.$

(d) Si $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ para algun $1 \leq p \leq \infty$, entonces $\dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} = \eta_\varepsilon * \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ en Ω_ε.

(e) Si $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ para algun $1 \leq p < \infty$, entonces $f^\varepsilon \to f$ en $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Ejercicio 7 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Probar que para todo $1 \leq p < \infty$ vale que

(a) Si $f, g \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, entonce $fg \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad c.t.p.\ (i = 1, 2, \ldots, N).$$

(b) Si $f \in W^{1,p}(\Omega)$ y $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$ entonces $F(f) \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\frac{\partial F(f)}{\partial x_i} = F'(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad c.t.p.\ (i = 1, \ldots, N).$$

(Si $|\Omega| < \infty$, la condición $F(0) = 0$ no es necesaria).

(c) Si $f \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces f^+, f^- y $|f| \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$Df^+ = \begin{cases} Df & c.t.p. \text{ en } \{f > 0\} \\ 0 & c.t.p. \text{ en } \{f \leq 0\} \end{cases} \quad Df^- = \begin{cases} 0 & c.t.p. \text{ en } \{f \geq 0\} \\ -Df & c.t.p. \text{ en } \{f < 0\} \end{cases}$$

$$D|f| = \begin{cases} Df & c.t.p. \text{ en } \{f > 0\} \\ 0 & c.t.p. \text{ en } \{f = 0\} \\ -Df & c.t.p. \text{ en } \{f < 0\} \end{cases}$$

(d) $Df = 0$ $c.t.p.$ en $\{f = 0\}$.

Ejercicio 8 Probar el Teorema de Traza para las funciones de Sobolev.

Ejercicio 9 Mostrar, mediante un ejemplo, que $W^{1,n}(B(0,1))$ no esta contenido en $L^\infty(B(0,1))$

Ejercicio 10 Mostrar una sucesión acotada en $W^{1,p}(U)$ con $1 \leq p < n$ que no contenga ninguna subsucesion convergente en $L^{p^*}(U)$.

Ejercicio 11 Mostrar que el Teorema de compacidad de Rellich-Kondrashov es falso para dominios no acotados.

Ejercicio 12 Demostrar la desigualdad de Poincare

$$\|f\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla f\|_{L^p(U)}$$

para toda $f \in C_c^1(U)$ donde C es independiente de f. Deducir que $\|\nabla f\|_{L^p(U)}$ es una norma equivalente a la usual en $W_0^{1,p}(U)$.

Ejercicio 13 Demostrar que la desigualdad de Poincare es cierta para funciones $f \in W^{1,p}(U)$ que tiene la propiedad $\mathcal{L}^n(\{f = 0\}) \geq \alpha > 0$ con la constante dependiendo de α.

Ejercicio 14 Demostrar que, para $1 \leq p \leq \infty$, la inclusion $W^{1,p}(U) \subset L^p(U)$ es compacta.

Ejercicio 15 Demostrar la desigualdad de Sobolev-Poincare

$$\left(⨍_U |f - (f)_U|^q \, dy \right)^{1/q} \leq C \left(⨍_U |\nabla f|^p \, dy \right)^{1/p}$$

para $f \in W^{1,p}(U)$, $p < n$ y $1 \leq q < p^*$.

Usando esta desigualdad para $U = B(0,1)$ y cambiando variables demostrar que

$$\left(⨍_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^q \, dy \right)^{1/q} \leq Cr \left(⨍_{B(x,r)} |\nabla f|^p \, dy \right)^{1/p}.$$

(nota: $⨍$ = integral promediada).