# Capítulo 2

# El axioma del infinito

## 2.1. El conjunto $\omega$

Ya observamos que con los axiomas anteriores podemos formar conjuntos finitos tan grandes como querramos. El axioma que introduciremos ahora nos permitirá obtener conjuntos infinitos. En particular, nos permitirá expresar al conjunto de los números naturales dentro de la teoría. Conviene destacar que hasta ahora estamos usando “finito” e “infinito” en el sentido intuitivo. Más adelante daremos las definiciones precisas dentro de la teoría.

DEFINICIÓN: Dado un conjunto $a$, el **siguiente** o **sucesor** de $a$ es $a' = a \cup \{a\}$.

Es claro que la correspondencia $a \mapsto a'$ establece una relación funcional en el universo $\mathcal{U}$. Por iteración podemos, partiendo de $\emptyset$, obtener conjuntos con $n$ elementos: $\emptyset$ (0 elementos), $\emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ (un elemento), $\emptyset'' = \{\emptyset\}' = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (2 elementos), $\emptyset''' = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (3 elementos), .... Estos conjuntos servirán para interpretar los números naturales dentro de la teoría. Como veremos en el Capítulo 9, los axiomas vistos hasta ahora no nos garantizan la existencia de un conjunto que tenga a todos ellos como elementos. Por lo tanto debemos postularlo.

DEFINICIÓN: Diremos que un conjunto $y$ es **inductivo**, y escribiremos $Ind(y)$, si y sólo si hace verdadera la siguiente fórmula:

$$\emptyset \in y \ \wedge \ \forall x \ (x \in y \ \rightarrow \ x' \in y).$$

**Axioma del Infinito:** $\exists y \ Ind(y)$.

Resulta inmediatamente de la definición, que si $u$ es un conjunto no vacío, cuyos elementos son todos conjuntos inductivos, entonces $\cap u$ es un conjunto inductivo.

Sea $a$ un conjunto inductivo y sea $c(a) = \{x \in \mathcal{P}(a) : Ind(x)\}$. Como $a \in c(a)$, $c(a) \neq \emptyset$, luego $\omega = \cap c(a)$ es un conjunto inductivo. Si $b$ es cualquier conjunto inductivo, $a \cap b \in c(a)$. Luego $\omega \subseteq b$. Resulta así que $\omega$ *es un conjunto* *inductivo mínimo*, en el sentido que está contenido en todo otro conjunto inductivo. Por el Axioma de Extensionalidad este conjunto inductivo mínimo es único.

DEFINICIÓN: El conjunto $\omega$ será llamado el **conjunto de los números naturales**, y los elementos de $\omega$ serán llamados **números naturales**.

El siguiente teorema, que expresa el principio de inducción finita, es una consecuencia inmediata de la minimalidad de $\omega$.

**Teorema 2.1.1.** $\forall x\ [(x \subseteq \omega \wedge Ind(x)) \to x = \omega]$.

DEFINICIÓN: Diremos que un conjunto $x$ es **transitivo**, y escribiremos $Trans(x)$, si y sólo si $\forall t\ (t \in x \ \to\ t \subseteq x)$.

En otras palabras, un conjunto $a$ es transitivo si y sólo si

$$\forall\, x \forall\, y(((x \in y) \wedge (y \in a)) \to (x \in a)).$$

**Teorema 2.1.2.** $Trans(\emptyset)\ \wedge\ \forall x\ (Trans(x)\ \to\ Trans(x'))$. *En palabras: el conjunto vacío es transitivo, y si $x$ es transitivo, el sucesor $x'$ también lo es.*

*Demostración.* La expresión $(x \in \emptyset\ \to\ x \subseteq \emptyset)$ es verdadera para todo $x$ porque $x \in \emptyset$ es falso para todo $x$. Por lo tanto $\emptyset$ es transitivo. Si $x$ es transitivo, el sucesor de $x$ es $x' = x \cup \{x\}$. Si $y \in x'$, entonces $(y \in x) \vee (y = x)$, en ambos casos tenemos $y \subseteq x$. □

**Corolario 2.1.3.** $\forall x\ (x \in \omega\ \to\ Trans(x))$, *esto es, todo los elementos de $\omega$ son transitivos.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.1.2 el conjunto $a = \{x \in \omega :\ Trans(x)\}$ es inductivo; como $a \subseteq \omega$, $a = \omega$. □

**Corolario 2.1.4.** *Para todo $n \in \omega$, $n'$ está caracterizado por las dos propiedades siguientes: $n \in n'$ y $\forall x \in \omega((n \in x) \to (n' \subseteq x))$.* □

En general, que todos los elementos de un conjunto sean transitivos no implica que el conjunto sea transitivo, como lo muestra el siguiente ejemplo: $\{\{\emptyset\}\}$.

**Teorema 2.1.5.** *$\omega$ es transitivo.*

*Demostración.* Sea $a = \{x \in \omega :\ x \subseteq \omega\}$. Veremos que $a$ es inductivo. Como $\omega$ es inductivo, $\emptyset \in \omega$; además $\emptyset \subseteq \omega$, por lo tanto $\emptyset \in a$. Sea $x \in a$. Tomemos $y \in x' = x \cup \{x\}$, entonces $y \in x\ \vee\ y = x$. Si $y = x$, entonces $y \in \omega$; por otra parte, si $y \in x$, como $x \subseteq \omega$, tenemos que $y \in \omega$. Lo anterior muestra que $x' \subseteq \omega$, y como $\omega$ es inductivo, $x \in \omega$ implica que $x' \in \omega$; por consiguiente $x' \in a$.

Con esto hemos demostrado que $a$ es inductivo y como $a \subseteq \omega$, tenemos que $a = \omega$. Esto último dice que todos los elementos de $\omega$ están incluidos en $\omega$, que es la definición de transitivo. □

El teorema anterior muestra que los elementos de un número natural son números naturales. Intuitivamente, tenemos $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = 1' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} \dots n' = \{0, 1, \dots, n\}$.

**Lema 2.1.6.** $\forall x\ \forall y\ [(Trans(x) \ \wedge\ y' \subseteq x') \ \rightarrow\ y \subseteq x]$. *Esto es, si $x$ es transitivo e $y'$ es un subconjunto de $x'$, entonces $y$ es un subconjunto de $x$.*

*Demostración.* Como $y \in y'$, $y' \subseteq x'$ implica $y \in x'$; entonces $y \in x$ o $y$ es igual a $x$. Como $x$ es transitivo ambas posibilidades para $y$ muestran que $y$ es un subconjunto de $x$. □

**Corolario 2.1.7.** *Si $m, n \in \omega$, entonces $(m' = n') \rightarrow (m = n)$.* □

El lector no tendrá ahora dificultad en verificar el conjunto $\omega$ satisface los conocidos Axiomas de Peano que caracterizan al conjunto de los números naturales. Esto justifica nuestra definición. Como los números enteros, racionales, reales y complejos pueden construirse a partir de los naturales por operaciones conjuntistas[1], todos ellos pueden definirse dentro de nuestra teoría axiomática.

Vamos a dirigir ahora nuestra atención a las propiedades de orden de los números naturales.

**Lema 2.1.8.** $\forall x\ ((Trans(x) \wedge\ x \notin x) \rightarrow\ x' \notin x')$. *Si $x$ es transitivo y no pertenece a sí mismo, el siguiente de $x$ tampoco.*

*Demostración.* Si $x' \in x'$, se sigue que $(x' \in x) \vee (x' = x)$. Como $x$ es transitivo tenemos que $x' \subseteq x$. Pero esto implica que $x \in x$, lo que es falso por hipótesis. □

**Lema 2.1.9.** $\forall n\ [(n \in \omega)\ \rightarrow\ (n \notin n)]$. *Ningún elemento de $\omega$ es miembro de si mismo.*

*Demostración.* Sea $a = \{n \in \omega :\ n \notin n\}$. El conjunto vacío pertenece a $a$ porque $\neg(\emptyset \in \emptyset)$. Si $n \in a$, tenemos que $n$ es transitivo y $n \notin n$, y por el Lema 2.1.8, $n' \notin n'$, entonces $n' \in a$. Por consiguiente $a$ es inductivo, y esto muestra que $a = \omega$ por estar incluido en $a$. □

**Teorema 2.1.10.** *Dados $m$ y $n$ en $\omega$, se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones: $n \in m$, $m \in n$, $n = m$.*

*Demostración.* Veamos primero que a lo sumo se puede satisfacer una de las condiciones. En efecto, si $m = n$ y $m \in n$, tendríamos $m \in m$, lo que es imposible por el Lema 2.1.9. Análogamente se ve que no puede ocurrir que $m = n$ y $m \in n$. Finalmente, supongamos que $m \in n$ y $m \in n$. Entonces por el Corolario 2.1.3 tendríamos $m \subseteq n$ y $n \subseteq m$, esto es $m = n$, lo que es absurdo por el Lema 2.1.9.

Para $m \in \omega$, sea $S(m) = \{n \in \omega\ :\ (n \in m) \vee (m \in n) \vee (n = m)\}$. Decir que se cumple al menos una de las tres condiciones, equivale a decir que $S(m) = \omega$

[1] Estas construcciones están tratadas en detalle en los libros de Balanzat y de Landau mencionados en la bibliografía.

para todo $m \in \omega$. Por lo tanto, para completar la demostración bastará probar que el conjunto $S = \{m \in \omega\ : S(m) = \omega\}$ es inductivo.

Primero veremos que $\emptyset \in S$, esto es, que $S(\emptyset) = \omega$.

Para ver esto mostraremos que $S(\emptyset)$ es inductivo. Es claro que $\emptyset \in S(\emptyset)$. Si $n \in S(\emptyset)$, entonces $(\emptyset \in n) \vee (n = \emptyset)$, lo que implica que $\emptyset \in n' = n \cup \{n\}$, y por lo tanto $n' \in S(\emptyset)$.

Probemos ahora que si $m \in S$, entonces $m' \in S$.

Sea $m \in S$, esto es $S(m) = \omega$. Debemos ver que también $S(m') = \omega$ y para ello probaremos que $S(m')$ es inductivo:

Como ya vimos que $S(\emptyset) = \omega$, tenemos que $m' \in S(\emptyset)$, lo que implica que $\emptyset \in S(m')$.

Sea $x \in S(m')$. Esto es se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones

$$(1)\ x \in m', \qquad (2)\ m' \in x, \qquad (3)\ x = m'.$$

Como por la hipótesis inductiva $S(m) = \omega$, resulta también que $x' \in \omega = S(m)$, esto es

$$(m \in x') \vee (x' \in m) \vee (x' = m).$$

Consideremos cada una de estas posibilidades:

I) Si $m \in x'$ entonces $(m \in x) \vee (x = m)$. Si $x = m$, entonces $x' = m'$, y $x' \in S(m')$. Si $m \in x$, no puede ser que se cumpla (1), por lo tanto deberá cumplirse (2) o (3) y en ambos casos obtenemos que $m' \in x'$, lo que implica que $x' \in S(m')$.

II) Si $x' \in m$, entonces $x' \in m'$ y resulta $x' \in S(m')$.

III) Si $x' = m$, entonces $x' \in m'$. y también ahora $x' \in S(m')$.

En todos los casos $x' \in S(m')$; por lo tanto $S(m') = \omega$, es decir, $m' \in S$. Esto muestra que $S$ es inductivo y por consiguiente igual a $\omega$. □

**Corolario 2.1.11.** *Para $m, n$ en $\omega$, se tiene que $m \subseteq n \leftrightarrow ((m = n) \vee (m \in n))$.*

*Demostración.* Supongamos que $m \subseteq n$. No puede ser que $n \in m$, pues esto implicaría que $n \in n$, contrariando el Lema 2.1.9. Luego, por el Teorema 2.1.10, debe ser $(m = n) \vee (m \in n)$. Por otro lado, si $(m = n) \vee (m \in n)$, entonces por el Corolario 2.1.3 resulta que $m \subseteq n$. □

Del Teorema 2.1.10 y del Corolario 2.1.11 resulta que la relación de inclusión $\subseteq$ define un orden total sobre $\omega$.

DEFINICIÓN: Sea $\langle a, \leq \rangle$ un conjunto ordenado y sea $b \subseteq a$. Diremos que $z$ es el **primer elemento** de $b$ si $z \in b$ y $\forall x \in b\ (z \leq x)$.

DEFINICIÓN: Una relación de orden $\leq$ sobre un conjunto $a$ se dice un **buen orden** si y sólo si todo subconjunto no vacío de $a$ tiene primer elemento.

**Observación 2.1.12.** *Todo conjunto bien ordenado $\langle a, \leq \rangle$ es totalmente ordenado.* En efecto, dados $x$, $y$ en $a$, el par $\{x, y\}$ tiene primer elemento, luego debe ser $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

**Teorema 2.1.13.** *La relación de inclusión $\subseteq$ define un buen orden sobre $\omega$.*

*Demostración.* Ya observamos que $\subseteq$ es una relación de orden. Luego resta probar que todo subconjunto no vacío de $\omega$ tiene primer elemento. Supongamos que $b$ es un subconjunto de $\omega$ que no tiene primer elemento y consideremos el conjunto $a = \{n \in \omega : \forall\ x \in b\ (n \subseteq x)\}$. Es claro que $0 = \emptyset \in a$. Si $n \in a$, entonces $n \in x$ para todo $x \in b$. En efecto, si fuese $n = x$ para algún $x \in b$, $n$ sería el primer elemento de $b$. Luego por el Corolario 2.1.4 tendremos que $\forall\ x \in b\ (n' \subseteq x)$, esto es, que $n' \in a$. Hemos probado así que $a$ es inductivo, y por consiguiente, que $a = \omega$. Supongamos que $b \neq \emptyset$ y sea $m \in b$. Como $m' \in \omega = a$, tendríamos $m' \subseteq m$, lo que es imposible. Luego si $b$ no tiene primer elemento debe ser vacío. □

Es inmediato verificar que si $\langle a, \leq \rangle$ es un conjunto bien ordenado, entonces todo subconjunto $b$ de $a$, con el orden heredado de $a$, es bien ordenado. De esta observación y del teorema anterior resulta que:

**Corolario 2.1.14.** *Para todo $n \in \omega$, se tiene que $\langle\ n, \subseteq\ \rangle$ es un conjunto bien ordenado.* □

## 2.2. Principio de Inducción Transfinita

Usamos el principio de inducción para probar el buen orden de los números naturales. Veremos ahora que estos dos conceptos están estrechamente vinculados.

Comenzaremos por la siguiente:

Definición: Sea $a$ un conjunto ordenado. Llamaremos **sección inicial** determinada por $y \in a$ al conjunto $a_y = \{x \in a :\ x < y\}$ (recordar que x <y significa que $x \leq y$ y $x \neq y$).

**Teorema 2.2.1.** *Sea $a$ un conjunto bien ordenado y $b$ un subconjunto de $a$ que satisface la siguiente propiedad:*

$$\text{(P)} \qquad \textit{Para todo } x \in a, \textit{ si } a_x \subset b \textit{ entonces } x \in b.$$

*Se tiene que $b = a$.*

*Demostración.* Supongamos, por el absurdo, que exista $b \subset a$ tal que $b$ satisface (P) y $b \neq a$. Entonces $a \setminus b \neq \emptyset$ y tiene primer elemento $u$. Veamos que $a_u \subset b$. En efecto, si $u$ es el primer elemento de $a$, entonces $a_u = \emptyset \subset b$. Si $u$ no es el primer elemento de $a$, entonces $a_u \neq \emptyset$. Sea $x \in a_u$. Como $u$ es el primer elemento de $a \setminus b$, no puede ser que $x \in a \setminus b$, luego $x \in b$. Consecuentemente $a_u \subset b$, y como $b$ satisface (P), resulta que $u \in b$. Pero esto es absurdo, puesto que $u \in a \setminus b$. □

**Observación 2.2.2.** Sea $a$ bien ordenado y $z$ el primer elemento de $a$. Como $a_z = \emptyset \subset b$ cualquiera que sea $b$, se tiene que la condición (P) en el enunciado del teorema anterior puede desdoblarse del modo siguiente:

(P1) $z \in b$

(P2) Para todo $x \in a$, si $y \in b$ para todo $y < x$, entonces $x \in b$.

El hecho de que todo subconjunto $b \subset \omega$ que satisface (P1) e (P2) debe coincidir con $\omega$ suele darse frecuentemente como una forma alternativa del principio de inducción finita para los naturales. De hecho, este enunciado equivale a la buena ordenación de $\omega$ (ver Ejercicio 2.6.8).

## 2.3. Ordinales

De los Corolarios 2.1.3 y 2.1.14 y de los Teoremas 2.1.5 y 2.1.13 resulta que tanto los números naturales como $\omega$ son conjuntos transitivos bien ordenados por la relación de inclusión. Vamos a estudiar ahora los conjuntos que tienen estas dos propiedades y que constituyen una importante generalización de los números naturales. Comenzaremos por algunas consideraciones generales sobre conjuntos bien ordenados.

DEFINICIÓN: Sea $a$ un conjunto ordenado y $b \subseteq a$. Diremos que $b$ es **decreciente** si $x \in b$ e $y \leq x$ implican que $y \in b$.

**Lema 2.3.1.** *Sea $a$ un conjunto bien ordenado, $b \subseteq a$ y $b$ decreciente. Si $b \neq a$, entonces existe $z \in a$ tal que $b = a_z$.*

*Demostración.* Supongamos que $a \setminus b \neq \emptyset$. Como $a$ es bien ordenado, $a \setminus b$ tiene primer elemento $z$. Mostraremos que $b = a_z$.

Si $y \in a_z$, entonces $y < z$, por lo tanto el elemento $y$ no pertenece a $a \setminus b$ y esto implica que $a_z \subseteq b$.

Si $y \in b$, supongamos que $z \leq y$. El conjunto $b$ es decreciente, entonces $z \in b \cap (a \setminus b) = \emptyset$: absurdo. Por lo tanto $y < z$, es decir $y \in a_z$. □

DEFINICIÓN: Sea $a$ un conjunto, diremos que $\in$ **es un buen orden estricto en** $a$ si y sólo si:

*Ord1)* $\forall x\ (x \in a \ \rightarrow\ x \notin x)$.

*Ord2)* $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(x \in a\ \wedge\ y \in a\ \wedge\ z \in a\ \wedge\ x \in y\ \wedge\ y \in z)\ \rightarrow\ x \in z]$.

*Ord3)* $\forall u\ \{(u \subseteq a\ \wedge\ u \neq \emptyset)\ \rightarrow\ \exists z\ [z \in u\ \wedge\ \forall x\ (x \in u\ \wedge\ x \neq\ z\ \rightarrow\ z \in x)]\}$

**Observación 2.3.2.** $\in$ es un buen orden estricto sobre $a$ si y sólo si se satisface $Ord1$ y $r_\in = \{\langle x, y\rangle \in a \times a : (x \in y) \vee (x = y)\}$ es un buen orden sobre $a$ *(comparar con el Lema 1.3.2).*

DEFINICIÓN: Diremos que un conjunto $x$ es un **ordinal** y escribiremos $Ord(x)$, si y sólo si $\in$ es un buen orden estricto en $x$ y $x$ es transitivo. Es decir, $Ord(x)$ es la conjunción *Ord1* $(x) \wedge$ *Ord2* $(x) \wedge$ *Ord3* $(x) \ \wedge \ Trans(x)$.

De los Teoremas 2.1.5 y 2.1.13 y de los Corolarios 2.1.11, 2.1.3, 2.1.14 resulta que $\omega$ y todos los números naturales son ordinales.

En general usaremos letras griegas para designar ordinales. Por ejemplo, la notación $\forall\alpha$ abreviará $\forall y\ (Ord(y) \rightarrow \ldots$ .

**Teorema 2.3.3.** *Si $\alpha$ es un ordinal, entonces:*

I) $\alpha \notin \alpha$.

II) *Si $x \in \alpha$, entonces $Ord(x)$.*

III) *Si $\beta \in \alpha$, entonces $\alpha_\beta = \beta$.*

IV) $Ord(\alpha')$

*Demostración.* I) De la condición *Ord1*$(\alpha)$, si $\alpha \in \alpha$, entonces $\alpha \notin \alpha$: absurdo. Por lo tanto $\alpha$ no puede pertenecer a $\alpha$.

II) Sea $x \in \alpha$. Como $\alpha$ es transitivo, $x \subseteq \alpha$; por consiguiente *Ord1*, *Ord2*, y *Ord3* se cumplen para $x$. Resta ver que $x$ es transitivo. Sea $t \in x$ y $s \in t$. Como $\alpha$ es transitivo, $t \in \alpha$ y $s \in \alpha$. Por *Ord2*, tenemos que $s \in x$; por consiguiente $x$ es transitivo. Todo lo anterior dice que $x$ es un ordinal.

III) Si $\beta \in \alpha$, como el orden lo da la relación de pertenencia, $\alpha_\beta = \{x \in \alpha \ : x < \beta\} = \{x \in \alpha \ : x \in \beta\} = \alpha \cap \beta = \beta$ ya que $\beta \subseteq \alpha$.

IV) Si $x \in \alpha'$, entonces $x \in \alpha$ ó $x = \alpha$. Por la propiedad *i)* y *Ord1* $(\alpha)$ tenemos que en ambos casos $x \notin x$. Si $x$, $y$, $z$ están en $\alpha'$ y $x \in y \in z$ entonces, por *Ord1* $(\alpha')$ , $x$ ni $y$ son $\alpha$, entonces pertenecen a $\alpha$. Si $z = \alpha$, $x \in z$. Si $z \neq \alpha$, $z \in \alpha$, como vale *Ord2* $(\alpha)$, $x \in z$. Por lo tanto *Ord2* $(\alpha')$ es verdadero. Sea $u \subseteq \alpha'$ y $u \neq \emptyset$. Si $u \cap \alpha \neq \emptyset$, entonces es un subconjunto no vacío de $\alpha$, luego por *Ord3)* existe $z \in u \cap \alpha$ tal que $z \in x$ para todo $x \in u \cap \alpha$, $z \neq x$. Como $z \in \alpha$, resulta que $z \in x$ para todo $x \in u$, $x \neq z$. Si $u \cap \alpha = \emptyset$, entonces $u = \{\alpha\}$, que tiene a $\alpha$ como primer elemento. Luego se satisface *Ord3)*. Finalmente, por el Teorema 2.1.2, $Trans(\alpha) \ \rightarrow \ Trans(\alpha')$; por consiguiente $\alpha'$ es un ordinal.

□

**Teorema 2.3.4.** *Si $\alpha$ y $\beta$ son ordinales, una y sólo una de las siguientes fórmulas es verdadera:* $(\alpha \in \beta)$ , $(\beta \in \alpha)$ *ó* $(\alpha = \beta)$.

*Demostración.* La transitividad de los ordinales y la propiedad (i) del Teorema 2.3.3 implican que las tres condiciones son mutuamente incompatibles (ver la demostración del Teorema 2.1.10). Para ver que al menos una de las condiciones se cumple, sea $c = \alpha \cap \beta$. Si $t \in x \in c$, $x \in \alpha$ y $x \in \beta$; como $\alpha$ y $\beta$ son transitivos, $t \in \alpha$ y $t \in \beta$, esto es $t \in c$; por consiguiente $c$ es un subconjunto decreciente tanto de $\alpha$ como de $\beta$. Entonces por el Lema 2.3.1 y (iii) del Teorema 2.3.3 se tiene que $c$ es un ordinal tal que $c = \alpha$ ó $c \in \alpha$. Análogamente se ve que $c = \beta$ ó $c \in \beta$. Combinando estas posibilidades resultan los 4 casos siguientes:

(1) $c = \alpha$ y $c = \beta$,

(2) $c = \alpha$ y $c \in \beta$,

(3) $c \in \alpha$ y $c = \beta$,

(4) $c \in \alpha$ y $c \in \beta$.

Por (ii) del Teorema 2.3.3 los casos (1), (2) y (3) corresponden a $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$, respectivamente. El caso (4) es imposible. En efecto, otra vez por (ii) del Teorema 2.3.3, (4) implicaría que $c$ es un ordinal y que $c \in \alpha \cap \beta = c$, lo que es imposible por (i) del mismo teorema. $\square$

**Observación 2.3.5.** Razonando como en la demostración del Corolario 2.1.11, de la transitividad de los ordinales y del Teorema 2.3.4 podemos deducir que *si $\alpha$ y $\beta$ son ordinales, entonces* $(\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$*. Además se tiene que* $\alpha \in \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta \leftrightarrow \alpha = \beta_\alpha$.

**Teorema 2.3.6.** *Sea $a$ un conjunto de ordinales, estos es* $\forall x\, (x \in a \to Ord(x))$*. Entonces se cumple que:*

(I) *$a$ está bien ordenado por la relación de inclusión.*

(II) *Si $a$ es transitivo, entonces es un ordinal.*

(III) *$\cup a$ es un ordinal.*

*Demostración. (i)* Por el Teorema 2.3.4 y la Observación 2.3.5, sabemos que $a$ está totamente ordenado por $\subseteq$. Para ver que está bien ordenado, sea $b \subseteq a$, $b \neq \emptyset$, y sea $\alpha \in b$. Si $\alpha \subseteq \beta$ para todo $\beta$ en $b$, entonces $\alpha$ es el primer elemento de $b$. Si no, existe $\beta$ en $b$ tal que $\beta \in \alpha$. De esto resulta que $\alpha \cap b \neq \emptyset$. Entonces, como $\alpha$ es bien ordenado, $\alpha \cap b$ tiene primer elemento, que llamaremos $\gamma$. Sea $\delta$ en $b$. Si $\delta$ está en $b \setminus \alpha$, $\delta \notin \alpha$, entonces $\gamma \in \alpha \subseteq \delta$, y por lo tanto $\gamma \subset \delta$. Si $\delta \in \alpha \cap b$, tenemos que $\gamma \subseteq \delta$. Luego $\gamma$ es el primer elemento de $b$.
*(ii)* Por (i) del Teorema 2.3.3 los elementos de $a$ satisfacen *Ord 1*, y teniendo en cuenta las Observaciones 2.3.2 y 2.3.5, de *(i)* resulta que $\in$ es un buen orden estricto sobre $a$, y como $a$ es transitivo por hipótesis, $a$ es un ordinal.
*(iii)* Como $\cup a$ es también un conjunto de ordinales, por *(ii)* bastará probar que $\cup a$ es transitivo. Sea $\beta \in \cup a$. Por la definición de la unión, existe $\alpha \in a$ tal que $\beta \in \alpha$, y como $\alpha$ es transitivo, resulta que $\beta \subseteq \alpha \subseteq \cup a$. $\square$

**Corolario 2.3.7.** *No existe un conjunto que tenga entre sus elementos a todos los ordinales.*

*Demostración.* Supongamos que existiese un conjunto $b$ tal que $\forall x\ (Ord(x) \to x \in b)$. Entonces podríamos formar el conjunto $a = \{x \in b : Ord(x)\}$, esto es $a$ sería el conjunto de todos los ordinales: $\forall x\ (Ord(x) \leftrightarrow x \in a)$. Como por (ii) del Teorema 2.3.3 $a$ sería transitivo, de (ii) del teorema anterior resultaría que $a$ es un ordinal y por lo tanto que $a \in a$, en contradicción con (i) del Teorema 2.3.3. $\square$

El enunciado del corolario anterior, conocido como la **Paradoja de Burali-Forti**, fue publicado en 1897 por el matemático italiano Cesare Burali-Forti (aunque parece que el mismo Cantor ya la había descubierto en 1895). Es otra paradoja de la teoría ingenua de conjuntos desarrollada por Cantor, pero al depender de una noción compleja como la de ordinal no tuvo el mismo impacto que la Paradoja de Russell, que utiliza sólo las nociones más intuitivas de conjunto y pertenencia. Para nosotros, la Paradoja de Burali-Forti significa simplemente que la clase $\{x : Ord(x)\}$ no es un conjunto.

## 2.4. Conjuntos Finitos

Vamos a ver ahora como se pueden caracterizar los números naturales, esto es, los elementos de $\omega$, en términos de ordinales. Comenzaremos por la siguiente:

**Observación 2.4.1.** *Si $\alpha$ es un ordinal, su siguiente $\alpha'$ está caracterizado por las dos propiedades siguientes* (comparar con el Corolario 2.1.4)*: (i) $\alpha \in \alpha'$, y (ii) si $Ord(\beta)$ y $\alpha \subset \beta$, entonces $\alpha' \subseteq \beta$.*

DEFINICIÓN: Un ordinal $\alpha$ tiene un **antecesor** si existe $\beta$ tal que $\alpha = \beta'$. Si $\alpha \neq \emptyset$ y no tiene antecesor inmediato, diremos que $\alpha$ es **límite**.

**Teorema 2.4.2.** *Para todo ordinal $\alpha$, las siguientes propiedades son eqivalentes:*

I) *$\alpha$ es límite.*

II) *$\alpha$ es inductivo.*

III) *$\cup\alpha = \alpha$ y $\alpha \neq \emptyset$.*

*Demostración.* $i$) implica $ii$): Como $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \notin \emptyset$ debe ser $\emptyset \in \alpha$. Si $\beta \in \alpha$, entonces por la Observación 2.4.1 tenemos que $\beta' \subseteq \alpha$, y como no puede ser $\beta' = \alpha$, debemos tener que $\beta' \in \alpha$. Hemos probado así que $Ind(a)$.
$ii$) implica $iii$): Si $\alpha$ es inductivo, entonces $t \in \alpha\ \to\ t' \in \alpha$. Como $\alpha$ es transitivo, esto implica que $t' \subseteq \alpha$, y por consiguiente, que $t \in \cup\alpha$. Luego $\alpha \subseteq \cup\alpha$. Por otra parte, si $t \in \cup\alpha$, hay un $\beta$ en $\alpha$ tal que $t \in \beta$, como $\alpha$ es transitivo por ser ordinal, tenemos $t \in \alpha$. Luego también $\cup\alpha \subseteq \alpha$.
$iii$) implica $i$): supongamos que $iii$) es verdadero y que existe un ordinal $\gamma$ tal que $\alpha = \gamma'$. Entonces $\gamma' = \alpha = \cup\alpha = \cup\gamma' = \gamma$; esto implica $\gamma \in \gamma$ que es absurdo por ser $\gamma$ ordinal. $\square$

De (ii) del teorema anterior se sigue que $\omega$ *es un ordinal límite.*

DEFINICIÓN: Diremos que $\alpha$ es un **ordinal finito**, y escribiremos $Ordfin(\alpha)$ si él y todos sus elementos no son límites.

**Teorema 2.4.3.** $\forall x\ (Ordfin(x) \leftrightarrow x \in \omega)$. *Esto es, los números naturales coinciden con los ordinales finitos.*

*Demostración.* Veamos primero que todos los elementos de $\omega$ son ordinales finitos. Sea $a = \{x \in \omega\ :\ Ordfin(x)\}$. El vacío pertenece a $\omega$ y es un ordinal finito por definición, por lo tanto es un elemento de $a$. Si $x \in a$, como $\omega$ es inductivo $x' \in \omega$ y el ítem $iv$) del Teorema 2.3.3, $x'$ es un odinal. Dado que $x'$ no es ordinal límite y sus elementos tampoco (porque $x$ es ordinal finito), tenemos que $x'$ es finito. Hemos probado que $a$ es inductivo y por lo tanto $\omega = a$.

Ahora veamos que todos los ordinales finitos pertenecen a $\omega$. Si $x$ un ordinal finito, por el Teorema 2.3.4 $x \in \omega\ \vee\ \omega \in x\ \vee x = \omega$, pero como $\omega$ es ordinal límite, no puede pertenecer a $x$ ni ser igual a $x$, por consiguiente $x \in \omega$. □

Este último teorema podría hacer pensar que se podría prescindir del Axioma del Infinito. En efecto, si bien los números naturales sirvieron para motivar la introducción de los ordinales, la demostración de las propiedades de estos últimos no dependieron de ningún resultado sobre números naturales. Por lo tanto los ordinales podrían haberse definido antes de introducir el Axioma del Infinito y posteriormente introducir los naturales como los ordinales finitos. Pero como los ordinales no forman un conjunto (Paradoja de Burali-Forti), no tendríamos medios para probar la existencia del conjunto de los ordinales finitos (esto se verá con precisión en el Teorema 9.2.4). De modo que aún siguiendo este camino necesitaríamos de un axioma para garantizar la existencia del conjunto de los ordinales finitos. Este camino es posible y de hecho es el seguido en muchos tratamientos de la teoría axiomática de conjuntos. El siguiente teorema muestra como el Axioma del Infinito puede ser formulado en términos de ordinales.

**Teorema 2.4.4.** *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

I) *Existe un conjunto inductivo (Axioma del Infinito).*

II) *Existe un conjunto $c$ que tiene entre sus elementos a todos los ordinales finitos.*

III) *Existe un ordinal límite.*

*Demostración.* $i$) implica $ii$): Como todo conjunto inductivo contiene a $\omega$, la implicación resulta del Teorema 2.4.3.
$ii$) implica $iii$): Supongamos que existe $c$ con la propiedad requerida. Sea $a = \{x \in c\ :\ Ordfin(x)\}$. Tomemos $x \in a$. Si $t \in x$, entonces $t$ es ordinal finito porque $x$ es ordinal finito (en efecto, si $s \in t$, entonces $s \in x$ porque $x$ es transitivo por lo tanto $s$ no es ordinal límite), por consiguiente $t \in a$; esto muestra que $a$ es transitivo. Como $a$ es un conjunto transitivo de ordinales, $a$ es

un ordinal. Si $a$ fuese finito, tendríamos que $a \in a$, lo que no es posible. Por lo tanto $a$ es infinito y como todos sus elementos son finitos, $a$ debe ser un ordinal límite.
$iii$) implica $i$): Esta implicación es el resultado obtenido en el Teorema 2.4.2. $\square$

**Observación 2.4.5.** Hemos definido a $\omega$ como el menor conjunto inductivo con respecto a la inclusión. Del Teorema 2.4.3 resulta que también *$\omega$ es el menor ordinal infinito con respecto a la inclusión:* $\forall x\ ((Ord(x) \wedge \neg\ Ordfin(x)) \rightarrow (\omega \subseteq x))$. Esta propiedad suele expresarse diciendo que *$\omega$ es el primer ordinal transfinito.*

Nos proponemos ahora definir la noción de conjunto finito.

DEFINICIÓN: Diremosque $a$ y $b$ son **equipotentes**, y escribiremos $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$, si existe una función de $a$ en $b$ biyectiva.

DEFINICIÓN: El conjunto $a$ es **finito**, si existe $n \in \omega$ tal que $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{a}}$.

**Teorema 2.4.6.** I) *Si $n \in \omega$ y $a \subset n$ entonces, existe $k \in n$ tal que $\bar{\bar{k}} = \bar{\bar{a}}$.*

II) *Si $k \in n$ entonces, $\bar{\bar{k}} \neq \bar{\bar{n}}$*

*Demostración. i)* Sea $s = \{n \in \omega\ :\ \forall\ x\ ((x \subset n) \rightarrow \exists k(k \in n\ \wedge\ \bar{\bar{k}} = \bar{\bar{x}}))\}$. Veremos que $s$ es inductivo y por lo tanto igual a $\omega$.

Es claro que $\emptyset \in s$. Supongamos que $n \in s$ y y sea $x \subset n' = n \cup \{n\}$. Consideraremos los dos casos siguientes:
*Caso 1:* $n \notin x$. Entonces $x \subset n$ o $x = n$. Como $x \in s$, $x \subset n$ implica que existe $k \in n \subset n'$ tal que $\bar{\bar{k}} = \bar{\bar{x}}$. Si $x = n$, entonces $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{x}}$, y $n \in n'$. Por lo tanto en este caso se tiene que $x' \in s$.
*Caso 2:* $n \in x$. Sea $y = x \setminus \{n\}$. Como $y \subset x$, por la hipótesis inductiva resulta que existe $k \in n$ tal que $\bar{\bar{k}} = \bar{\bar{y}}$, es decir, existe una función biyectiva $f\colon y \to k$. Sea $g\colon x \to k'$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in y, \\ k & \text{si } t = n. \end{cases}$$

Claramente $g$ es biyectiva, lo que significa que $\bar{\bar{k'}} = \bar{\bar{x}}$. Para terminar de probar que también en este caso $n' \in s$, hay que ver que $k' \in n'$. Como $n' \subseteq k'$ implicaría que $n \in k$ o $n = k$, lo que contradiría $k \in n$, por el Corolario 2.1.11 debe ser $k' \in n'$. Por lo tanto $n' \in s$ y completamos la demostración de (i).

*ii)* Sea $a = \{n \in \omega : \forall k(k \in n \rightarrow \bar{\bar{k}} \neq \bar{\bar{n}})\}$. Probaremos que $a$ es inductivo. $\emptyset \in a$ porque para todo $k$ es falso $k \in \emptyset$. Si $n \in a$ veremos que $n' \in a$. Supongamos que $n' \notin a$, entonces existe $k \in n'$ y una función biyectiva $f\colon n' \to k$. La función $g\colon n \to k \setminus \{f(n)\}$, determinada por $g(t) = f(t)$ para todo $t \in n$ es biyectiva, entonces $\bar{\bar{n}} = \overline{\overline{k \setminus \{f(n)\}}}$. Por otra parte, como $k \setminus \{f(n)\} \subset k$, por *i)* existe $j \in k$ tal que $\bar{\bar{j}} = \overline{\overline{k \setminus \{f(n)\}}}$. Dado que $k \subseteq n$, tenemos $j \in n$ y $\bar{\bar{j}} = \bar{\bar{n}}$, contradiciendo $n \in a$. $\square$

**Corolario 2.4.7.** *Cada uno de los enunciados listados a continuación implica al siguiente:*

i) *$x$ es un conjunto finito.*

ii) *Existe un único $n$ en $\omega$ tal que $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{x}}$*

iii) *Si $y \subseteq x$, entonces $y$ es finito.*

iv) *Si $y \subseteq x$ y $\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{x}}$, entonces $x = y$.*

*Demostración.* *i)* implica *ii)*: Si $n$ y $m$ están en $\omega$ y $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{x}} = \overline{\overline{m}}$, por el teorema anterior $n \notin m$ y $m \notin n$, por lo tanto $n = m$.
*ii)* implica *iii)*: Existe un único $n$ tal que existe una $f : x \mapsto n$ biyectiva. Si $y \subseteq x$, sea $g = f|_y$. Como $f$ es biyectiva, $img(g) \subset n$, entonces existe $k \in n$ tal que $\bar{\bar{k}} = \overline{\overline{img(g)}} = \bar{\bar{y}}$.
*iii)* implica *iv)*: Como $x \subseteq x$, $x$ es finito. Si $y \subseteq x$ y $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$, sea $n \in \omega$ tal que $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{n}}$. Supongamos que $x \neq y$. Con un argumento similar al dado en la demostración de *ii)*$\rightarrow$ *iii)*, se ve que existe $k \in n$ tal que $\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{k}}$, entonces $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{k}}$ que es absurdo por el teorema anterior. □

En realidad los enunciados listados en el corolario anterior son equivalentes, pero para demostrar que *iv)* implica *i)* se requiere del Axioma de Elección, que presentaremos en el capítulo 5.

Para los ordinales tenemos dos conceptos de "finitud": una, la de ordinal finito, otra la de ser finito como conjunto. Resulta del corolario anterior que ambas nociones coinciden:

**Corolario 2.4.8.** *Un ordinal $\alpha$ es un conjunto finito si y sólo si es un número natural.*

*Demostración.* Es claro que los números naturales son conjuntos finitos. Por otra parte $\omega$ es un conjunto infinito. En efecto, si fuese $\omega$ finito existiría $n \in \omega$ tal que $\bar{\bar{\omega}} = \bar{\bar{n}}$, y como $n \subseteq \omega$, por *iv)* del Corolario 2.4.7 resultaría que $\omega = n$, lo que es absurdo. Sea ahora $\alpha$ un ordinal finito. Tenemos que $(\alpha \in \omega) \vee (\omega \subseteq \alpha)$; pero si $\omega \subseteq \alpha$, por *(iii)* del Corolario 2.4.7 resultaría $\omega$ finito. □

**Observación 2.4.9.** De *(ii)* del Corolario 2.4.7 resulta que no puede haber una biyección entre dos números naturales distintos. En particular, se tiene que $\bar{\bar{n}} \neq \overline{\overline{n'}}$. Esta propiedad también caracteriza a los ordinales finitos. En efecto, si $\alpha$ es un ordinal no finito, entonces $\omega \subseteq \alpha$. Sea $f\colon \alpha \to \alpha \setminus \{\emptyset\}$ definida por

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta & \text{si } \beta \in \alpha \setminus \omega \\ \beta' & \text{si } \beta \in \omega \end{cases}$$

$f$ es biyectiva, por lo tanto $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha \setminus \{\emptyset\}}}$. Si definimos $g\colon \alpha' \to \alpha$ dada por $g(t) = f(t)$ para $t \in \alpha$ y $g(\alpha) = \emptyset$, vemos que $g$ es también biyectiva. Luego $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha'}}$.

## 2.5. Principio de Inducción Sobre los Ordinales

Como todo ordinal es un conjunto bien ordenado, satisface el principio de inducción transfinita. El teorema que sigue, conocido como **Principio de Inducción Sobre los Ordinales**, extiende este principio a la *clase* de los ordinales.

**Teorema 2.5.1.** *Sea $\varphi$ una fórmula con una única variable libre.*

$$(\forall\alpha\ \{[\forall\beta\ (\beta \in \alpha) \to \varphi(\beta)] \to \varphi(\alpha)\}) \to \forall\gamma\ \varphi(\gamma)$$

*Esto es, si una fórmula vale para un ordinal siempre que valga para sus anteriores, entonces vale para todos los ordinales.*

*Demostración.* Supongamos que existe un $\gamma$ tal que $\neg\varphi(\gamma)$. Sea

$$c = \{\beta \in \gamma' : (\beta \leq \gamma) \wedge \neg\varphi(\beta)\}.$$

El conjunto $c$ es no vacío, pues $\gamma \in c$. Sea $\gamma_0$, el primer elemento de $c$. Si $\beta \in \gamma_0$ entonces $\varphi(\beta)$ es verdadera, de lo contrario $\gamma_0$ no sería el primer elemento de $c$. Por lo tanto, $\forall\beta\ (\beta \in \gamma_0 \to \varphi(\beta))$ y por hipótesis implica $\varphi(\gamma_0)$ que es absurdo porque $\gamma_0 \in a$. □

## 2.6. Ejercicios

**Ejercicio 2.6.1.** *Sea $a$ un conjunto transitivo y sea $r_\in = \{\langle x, y\rangle \in a \times a : x \in y\}$.*

1. *¿Es cierto que $r_\in$ es una relación transitiva sobre $a$?*
2. *¿Es cierto que si $r_\in$ es un a relación transitiva sobre $a$, entonces $a$ es transitivo?*

*Fundamente sus respuestas.*

**Ejercicio 2.6.2.** *Probar que para todo conjunto $a$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$a$ es transitivo.*
2. *Para todo $b \subseteq a$, $\cup b \subseteq a$.*
3. *$\mathcal{P}(a)$ es transitivo.*
4. *$\cup a' = a$.*

**Ejercicio 2.6.3.** *Probar que si $a$ es transitivo también lo es $\cup a$. De un ejemplo para mostrar que $Trans(\cup a)$ no implica $Trans(a)$.*

**Ejercicio 2.6.4.** *Probar que si $a$ es un conjunto tal que todos sus elementos son transitivos, entonces $\cup a$ es transitivo.*

**Ejercicio 2.6.5.** *Probar que un conjunto totalmente ordenado* $(a, \leq)$ *es bien ordenado si y sólo si* $\leq$ *es un buen orden sobre todas sus secciones iniciales.*

**Ejercicio 2.6.6.** *Un conjunto totalmente ordenado es bien ordenado si y sólo si todo subconjunto propio decreciente es una sección inicial.*

**Ejercicio 2.6.7.** *Sea* $a$ *un conjunto bien ordenado. Probar que si* $a \neq \emptyset$, *entonces* $\emptyset \in a$.

**Ejercicio 2.6.8.** *Un conjunto ordenado* $(a, \leq)$ *satisface el* ***Principio de Inducción Transfinita*** *si todo subconjunto de* $a$ *con la propiedad (P) del enunciado del Teorema 2.2.1 coincide con* $a$. *Esto es, si para todo* $b \subset a$, *si* $b$ *satisface (P), entonces* $b = a$. *Probar que todo conjunto* totalmente *ordenado con primer elemento y que satisface el principio de inducción transfinita es bien ordenado.*

**Ejercicio 2.6.9.** *Sea* $a$ *un conjunto de ordinales. Pruebe que:*

1. *El ordinal* $\cup a$ *es el supremo de* $a$ *respecto al orden dado por la inclusión. Esto es,* $\cup a$ *es el ordinal caracterizado por las dos propiedades siguientes:*

   (I) $\alpha \subseteq \cup a$ *para todo* $\alpha \in a$.

   (II) *Si* $\beta$ *es un ordinal tal que* $\alpha \subseteq \beta$ *para todo* $\alpha \in a$, *entonces* $\cup a \subseteq \beta$.

   *De ejemplos en los que* $\cup a \in a$ *y en los que* $\cup a \notin a$.

2. *Si* $a \neq \emptyset$, *entonces* $\cap a$ *el primer elemento de* $a$.

**Ejercicio 2.6.10.** *Sea* $(a, \leq)$ *un conjunto ordenado y* $b \subseteq a$. *Se dice que* $b$ *es* ***cofinal en*** $a$ *(respecto al orden* $\leq$*) si para todo* $x \in a$ *existe* $y \in b$ *tal que* $x \leq y$. *Sea* $\alpha$ *un ordinal y* $b \subseteq \alpha$.

1. *Pruebe que si* $\alpha$ *es límite, entonces* $b$ *es cofinal en* $\alpha$ *(respecto al orden* $\subseteq$*) si y sólo si* $\cup b = \cup \alpha$.

2. *Si* $\alpha \neq \emptyset$ *y* $\alpha$ *no es límite, de una condición necesaria y suficiente para que* $b$ *sea cofinal en* $\alpha$.