Capítulo 5

El Axioma de Regularidad

Errata

1. El enunciado del Ejercicio 2.6.7 (Capítulo 2) es incorrecto. Debe ser sustituido por el siguiente:

   Sea a un conjunto de ordinales. Probar que si $a \neq \emptyset$, entonces $\cap a \in a$.

5.1. Conjuntos regulares

Consideremos la operación

$$S(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x = \emptyset \\ \bigcup_{z \in Im(x)} \mathcal{P}(z) & \text{si } x \neq \emptyset \end{cases}$$

El Principio de Definición por Recurrencia nos dice que existe una operación V tal que $V(\alpha) = S(V|_\alpha)$ para todo ordinal α. Siguiendo la costumbre en textos de teoría de conjuntos escribiremos V_α en lugar de $V(\alpha)$.

Tenemos que $V_0 = S(V|_0) = \emptyset$.

Si $\alpha > 0$, $V_\alpha = S(V|_\alpha) = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$.

Es claro que si $\alpha < \beta$, entonces $V_\alpha \subseteq V_\beta$.

Para todo ordinal α, $V_{\alpha+1} = \bigcup_{\beta \in \alpha+1} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{P}(V_\beta) = \mathcal{P}(\alpha)$, porque $V_\alpha \subseteq V_\beta$ implica que $\mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(V_\beta)$.

Si α es límite $V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta \leq \alpha} V_{\beta+1} \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$, porque $\beta \in \alpha$ implica que $\beta+1 \in \alpha$ porque α es límite; además $V_\beta \subseteq V_\alpha$ para todo $\beta \in \alpha$, por lo tanto $\bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta \subseteq V_\alpha$. Con estas inclusiones podemos concluir que $V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$.

DEFINICIÓN: Diremos que el conjunto a es **regular** si existe un ordinal α tal que $a \in V_\alpha$; en ese caso llamaremos **rango** de a, y lo simbolisaremos $rg(a)$, al primer ordinal γ tal que $a \in V_\gamma$.

El rango de un conjunto es siempre el siguiente de alguien, esto es, si a es un conjunto y $\alpha = rg(a)$, entonces existe β tal que $\alpha = \beta + 1$. Para ver esto, basta observar que si α es límite, entonces $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$, por lo tanto, si $a \in V_\alpha$, existe $\beta \in \alpha$ tal que $a \in V_\beta$ y esto contradice que α sea el rango de a.

$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, por lo tanto si $a \in V_{\alpha+1}$, $a \subseteq V_\alpha$.

Teorema 5.1.1. *a es regular si y sólo si todos los elementos de a son regulares. Además, $x \in a$ implica que $rg(x) < rg(a)$.*

Demostración. Sea a regular. Existe β tal que $rg(a) = \beta + 1$. Tenemos que $a \subseteq V_\beta$, por lo tanto si $x \in a$, entonces $x \in V_\beta$. Además, $rg(x) \leq \beta < \beta + 1$.

Supongamos que para todo $x \in a$, x sea regular y sea

$$c = \{rg(x) : x \in a\}.$$

Por el axioma de Sustitución, c es un conjunto, y por (iii) del Teorema 2.3.6, $\cup c$ es un ordinal, que llamaremos α: $\alpha = \cup c$. Tenemos que $x \in V_{rg(x)} \subseteq V_\alpha$. Por lo tanto $a \subseteq V_\alpha$, esto es, $a \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. □

Teorema 5.1.2. *Todo ordinal α es regular y $rg(\alpha) = \alpha + 1$.*

Demostración. Para demostrar este hecho veremos que para todo ordinal α

I) $\alpha \in V_{\alpha+1}$ y

II) $\alpha \notin V_\alpha$.

Supongamos que existe un ordinal tal que no pase *i)* y sea γ el primero para el cual no pase *i)*. Si $\beta \in \gamma$, $\beta \in V_{\beta+1}$; entonces $\gamma \subseteq \bigcup_{\beta\in\gamma} V_{\beta+1} = \bigcup_{\beta\in\gamma} \mathcal{P}(V_\beta) = V_\gamma$, y esto dice que $\gamma \in \mathcal{P}(V_\gamma) = V_{\gamma+1}$ en contradicción con lo supuesto.

Supongamos que existen ordinales para los cuales *ii)* no se cumple y sea γ primero de ellos. Tenemos que $\gamma \in V_\gamma = \bigcup_{\beta\in\gamma} \mathcal{P}(V_\beta)$. Entonces existe $\beta \in \gamma$ tal que $\gamma \in \mathcal{P}(V_\beta)$. Por lo tanto $\gamma \subseteq V_\beta$, entonces $\beta \in V_\beta$ que es absurdo. □

5.2. Axioma de Regularidad

A continuación presentaremos otro axioma de la teoría. Este nuevo axioma tiene como propósito formalizar nuestra idea intuitiva de que el universo $\mathcal{U}$ se forma en etapas. Estas etapas están indexadas por los ordinales.

Axioma de Regularidad:

$$\forall x\ \exists y\ (y \in x\ \wedge\ x \cap y = \emptyset)$$

Teorema 5.2.1. *Los conjuntos regulares satisfacen el Axioma de Regularidad.*

Demostración. Sea $a \neq \emptyset$, a regular. Si $x \in a$, x es regular (teorema X) y $rg(x) < rg(a)$. Sea $b = \{\beta \in rg(a) : \text{existe } x \text{ en } a \text{ tal que } rg(x) = \beta\}$. Como a es no vacío, b tampoco. Sea γ el primer elemento de b. Existe $z \in a$ tal que $rg(z) = \gamma$. Si $x \in z \cap a$, entonces $rg(x) < rg(z) = \gamma$ y $rg(x) \in b$ y esto contradice el hecho de que γ sea el primero. □

Teorema 5.2.2. *El Axioma de Regularidad implica que todo conjunto transitivo sea regular.*

Demostración. Sea a un conjunto transitivo y no vacío. Sea $b = \{y \in a : y \text{ es regular }\}$. Supongamos que $a \setminus b \neq \emptyset$. Por el Axioma de Regularidad existe $z \in a \setminus b$ tal que $z \cap a \setminus b = \emptyset$. Como a es transitivo, $z \subseteq a$, entonces $z \subseteq b$. Luego, si $y \in a$, entonces $y \in b$, entonces y es regular y por lo tanto z es regular. Esto dice que $z \in b$ que es absurdo porque $z \in a \setminus b$. Tenemos entonces que $a \setminus b = \emptyset$, y como $b \subseteq a$, $a = b$. □

Teorema 5.2.3. *El Axioma de Regularidad vale si y sólo si todo conjunto es regular.*

Demostración. Supongamos primero que vale el axioma. Esto implica que todo conjunto transitivo sea regular. Todo conjunto a está incluido en su clausura transitiva T, que es transitiva y por lo tanto regular, y como a es un subconjunto de un conjunto regular, es también regular.

El Teorema 5.2.1 completa la demostración. □

Los siguientes teoremas serán considerados en presencia del Axioma de Regularidad.

Teorema 5.2.4. *No existe una sucesión $x = \{u_n\}_{n \in \omega}$ tal que $u_{n+1} \in u_n$ para todo n.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $x = \{u_n\}_{n \in \omega}$ tal que $u_{n+1} \in u_n$ para todo n. Sea Y el rango de x. Si $y \in Y$ entonces $y = u_n$ para algún n, y tenemos que $u_{n+1} \in y \cap Y$. Por lo tanto para todo $y \in Y$, $y \cap Y \neq \emptyset$ en contradicción del Axioma de Regularidad. □

Corolario 5.2.5. *No existe un conjunto $x = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tal que $x_0 \in x_1 \in ... \in x_n \in x_0$.*

Corolario 5.2.6. *No existe a tal que $a \in a$.*

Teorema 5.2.7. *Si x es transitivo entonces $\emptyset \in x$.*

Demostración. Existe $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$, pero $y \subseteq x$ por ser x transitivo, por lo tanto $y = y \cap x = \emptyset$. □

Teorema 5.2.8. *El conjunto α es ordinal si y sólo si α es transitivo y para todo x e y en α se cumple $x \in y \vee x = y \vee x \in y$.*

Demostración. Si α es ordinal, entonces por definición se satisfacen las condiciones pedidas.

Para mostrar la otra parte, sea $b \in \alpha$ $b \neq \emptyset$, entonces existe $z \in b$ tal que $z \cap b = \emptyset$. Tenemos que si $x \in b$, $x \notin z$, entonces $z = x \vee z \in x$, esto es, z es el primer elemento de b. □

5.3. Negación del Axioma de Regularidad

Vimos en el Capítulo 1 que del Axioma Esquema de Especificación resulta que para todo conjunto a existe un conjunto b tal que $b \notin a$ y por consiguiente que no puede existir un conjunto que contenga a todos los conjuntos, evitando así la Paradoja de Russell. Por otra parte, el Axioma de Regularidad prohíbe la existencia de conjuntos que sean elementos de sí mismos. Nos proponemos mostrar en esta sección que el sistema ZFC es compatible con la existencia de conjuntos a tales que $a \in a$.

Para ello vamos a definir una operación $\in^*$ en el universo $\mathcal{U}$ de modo que en sistema $(\mathcal{U}, \in^*)$ se satisfagan los axiomas de ZFC y exista un conjunto a tal que $a \in^* a$. Es decir, serán satisfechos simultáneamente los axiomas de ZFC y la negación del Axioma de Regularidad.

Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos con dos variables libres satisfaciendo las siguientes condiciones:

P$_1$ $\forall x \forall y \forall z ((\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z)) \rightarrow y = z$,

P$_2$ $\forall x \forall y \forall z ((\varphi(x, z) \wedge \varphi(y, z)) \rightarrow x = y$,

P$_3$ $\forall x \exists y \varphi(x, y)$,

P$_4$ $\forall y \exists x \varphi(x, y)$.

De acuerdo con la propiedad P_1, para todo x definimos $F(x)$ como el único y tal que $\varphi(x, y$. Esto es, $\varphi(x, F(x)$ es verdadera. Análogamente, por P_2 para todo y podemos definir $F^{-1}(y)$ como el único x tal que $\varphi(x, y)$, esto es $\varphi(F^{-1}(y), y)$ es verdadera. Por P_3 y P_4 podemos pensar a F como una "biyección" del universo $\mathcal{U}$ en si mismo, y a F^{-1} como su inversa. Claramente se tiene que:

$$\forall y F(F^{-1}(y)) = y \;\text{ y }\; \forall x F^{-1}(F(x)) = x \tag{5.1}$$

En el universo $\mathcal{U}$ definimos una relación $\in^*$ del modo siguiente:

$$\forall x \forall y (x \in^* y \leftrightarrow x \in F(y)).$$

Debemos adaptar la definición de fórmula dada en el Capítulo 1 sustituyendo el símbolo $\in$ por $\in^*$. Dada una fórmula ψ, denotaremos por ψ^* la expresión obtenida al reescribir ψ poniendo $\in^*$ en vez de $\in$. Así, por ejemplo,

$$(x \in y)^* = (x \in^* y) \;\text{ y }\; (x = y)^* = (x = y).$$

Comenzaremos por probar que si ψ es una fórmula correspondiente a un axioma de ZFC, entonces ψ^* es verdadera en $(\mathcal{U}, \in^*)$. Esto mostrará que $(\mathcal{U}, \in^*)$ es un modelo de ZFC. Después, veremos que eligiendo una F conveniente, obtendremos un modelo de ZFC que satisface la negación del Axioma de Regularidad.

Extensionalidad. Para ver que

$$\forall x \; \forall y \; (\forall t \; (t \in^* x \leftrightarrow t \in^* y) \rightarrow (x = y))$$

es verdadera en $(\mathcal{U}, \in^*)$ observemos que

$$\forall t\ (t \in^* x \leftrightarrow t \in^* y) \leftrightarrow \forall t\ (t \in F(x) \leftrightarrow t \in F(y)) \leftrightarrow F(x) = F(y) \leftrightarrow x = y.$$

Conjunto vacío. Sea $\emptyset^* = F^{-1}(\emptyset)$. De la definición de $\in^*$ resulta que

$$\forall x \neg\ (x \in^* \emptyset^*).$$

Unión. Sea a un conjunto y sea $\cup^* a = F^{-1}(\bigcup_{y \in F(a)} F(y))$. Es fácil ver que

$$\forall t\ (t \in^* \cup^*(a) \leftrightarrow \exists y\ (y \in^* a \wedge t \in^* y).$$

Conjunto Potencia. Sea a un conjunto. Observemos que

$$x \subseteq^* a \leftrightarrow \forall t\ (t \in^* x \to t \in^* a) \leftrightarrow$$

$$\forall t\ (t \in F(x) \to t \in F(a) \leftrightarrow F(x) \subseteq F(a) \leftrightarrow F(x) \in \mathcal{P}(F(a)).$$

Por el Axioma de Sustitución, la clase $\{F^{-1}(y) : y \in \mathcal{P}(a)\} = \{x : F(x) \in \mathcal{P}(a)\}$ es un conjunto. Sea $\mathcal{P}^*(a) = F^{-1}(\{x : F(x) \in \mathcal{P}(a)\}$. Resulta que $x \subseteq^* a \leftrightarrow x \in^* \mathcal{P}^*(a)$.

Sustitución Sea a un conjunto y $\psi(x, y)$ una fórmula tal que $\psi^*(x, y)$ define una relación funcional sobre a:

$$(\forall x\ (x \in^* a \to \exists!\ y\ \psi^*(x, y))) \leftrightarrow (\forall x\ (x \in F(a) \to \exists!\ y\ \psi^*(x, y))).$$

Por el Axioma de Sustitución,

$$\{y : \exists x \in^* a\ (\psi^*(x, y))\} = \{y : \exists x \in F(a)\ (\psi^*(x, y))\}$$

es un conjunto.

Como el Axioma de Sustitución es válido en $\mathcal{U}, \in^*)$, también son válidos los Axiomas de Especificación y de Existencia del Par.

Infinito. Sea la "función"S definida en $\mathcal{U}$ por

$$S(x) = \begin{cases} \emptyset^* & \text{si } x = 0, \\ F(x(n)) \cup \{x(n)\} & \text{si } x \text{ es función y dom(x) = n+1}, \\ \emptyset & \text{si no se cumplen las condiciones anteriores.} \end{cases}$$

Por recurrencia definimos la función f con $dom(f) = \omega$ satisfaciendo $f(n) = S(f|_n)$. Entonces se tiene que $f(n) = \emptyset^*$ y $f(n+1) = F(f(n)) \cup \{f(n)\}$.

Observemos que $x \in f(n+1) \leftrightarrow x \in^* f(n) \vee x = f(n)$, lo que significa que $f(n+1) = f(n)'^*$.

Por el Axioma de Sustitución $img(f)$ es un conjunto. Sea $\omega^* = F^{-1}(img(f))$, y veamos que ω^* es inductivo en $(\mathcal{U}, \in^*)$: $\emptyset^* \in^* \omega^*$ porque $\emptyset^* = f(0) \in img(f)$. Supongamos que $x \in^* \omega^*$. Entonces $x \in img(f)$ y por lo tanto $x = f(n)$ para algún $n \in \omega$. Luego $x'^* = f(n+1) \in img(\omega)$, lo que significa que $x'^* \in \omega^*$.

Elección. Sea a un conjunto que en $(\mathcal{U}, \in^*)$ es no vacío y cuyos elementos son no vacíos y disjuntos dos a dos. Esto es, a satisface:

I*) $a \neq \emptyset^*$,

II*) $\forall x (x \in^* a) \to \exists\, t\ (t \in^* x)$,

III*) $\forall x\ \forall y\ ((x \in^* a)\ \wedge\ (y \in^* a)\ \wedge\ (x \neq y)) \to (\forall z\ ((z \notin^* x) \vee (z \notin^* y))$.

En $(\mathcal{U}, \in)$, las propiedades anteriores significan que a satisface las propiedades:

I) $a \neq \emptyset$,

II) $\forall x\ ((x \in F(a)) \to (F(x) \neq \emptyset)$,

III) $\forall x\ \forall\ y\ ((x \in F(a)) \wedge (y \in F(a)) \wedge (x \neq y)) \to (F(x) \cap F(y) = \emptyset)$.

Entonces, teniendo en cuenta el Axioma de Sustitución, resulta que $a_1 = \{F(x) : x \in F(a)\}$ es un conjunto no vacío de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Luego por el Axioma de Elección existe un conjunto b_1 tal que

$$\forall\ t\ \exists\ y\ ((t \in a_1) \to \forall z\ ((y = z) \leftrightarrow ((z \in t) \wedge (z \in b_1)). \tag{5.2}$$

Como $(t \in a_1) \leftrightarrow \exists x\ ((x \in F(a)) \wedge (t = F(x)))$, (5.2) se puede escribir

$$\forall x\ \exists\ y\ ((x \in F(a)) \to \forall z\ ((y = z) \leftrightarrow (z \in F(x)) \wedge (z \in b_1)).$$

Definiendo $b = F^{-1}(b_1)$, se tiene que

$$\exists\ b\ (\forall x\ \exists\ y\ ((x \in^* a) \to \forall z\ ((y = z) \leftrightarrow ((z \in^* x) \wedge (z \in^* b)),$$

que es la formulación del Axioma de Elección en $(\mathcal{U}, \in^*)$.

Acabamos de ver que $(\mathcal{U}, \in^*)$ satisface los axiomas ZFC, cualquiera que sea la F definida a partir de una fórmula $\varphi(x, y)$ que satisfaga las propiedades $P_1 - P_4$.

Sea

$$\varphi(x, y) = (x = 0 \to y = 1) \wedge (x = 1 \to y = 0) \wedge ((x \neq 0) \wedge (x \neq 1)) \to (x = y).$$

Es claro que φ satisface $P_1 - P_4$ y la F correspondiente está definida para todo x como

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x = 1, \\ x & \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq 1. \end{cases}$$

Como $0 \in F(0) = 1 = \{0\}$, resulta que $0 \in^* 0$ y del Corolario 5.2.6 resulta que el Axioma de Regularidad es falso en este $(\mathcal{U}, \in^*)$.

5.4. Ejercicios

Ejercicio 5.4.1. *Usando las definiciones del Ejercicio 2.6.12 probar que:*

1. *Si a es un conjunto regular, entonces $\in$ es bien fundada sobre a.*
2. *Si $\in$ es bien fundada sobre un conjunto transitivo a, entonces a es regular.*

Ejercicio 5.4.2. *Sea $\in^*$ la pertenencia definida por una "función" F determinada por una fórmula que satisface las propiedades $P_1 - P_4$ consideradas en §5.3. Pruebe que:*

1. $x \cap^* y = F^{-1}(F(x) \cap F(y))$,
2. $\{x, y\}^* = F^{-1}(\{x, y\})$,
3. $\{x\}^* = F^{-1}(\{x\})$,
4. $\langle x, y\rangle^* = F^{-1}(\langle x, y\rangle)$.