# Capítulo 6

# Modelos

En este capítulo veremos ejemplos de como demostrar la independencia de un axioma o su consistencia relativa a los otros. Si A es un sistema de axiomas:

1. $A^+$ es el sistema de axiomas formado por los axiomas de A más el Axioma de Regularidad.
2. AC es el sistema de axiomas formado por los axiomas de A más el Axioma de Elección.

Por ejemplo, $ZFC^+$ indica el sistema formado por los axiomas de ZF más los Axioma de Elección y Regularidad.

## 6.1. La clase $\mathcal{V}$

DEFINICIÓN: Llamaremos $\mathcal{V}$ a la clase de todos los conjuntos regulares: la fórmula que la define es $\exists y\ (Ord(y) \wedge (x \in V_y))$ que resumiremos con $\mathcal{V}(x)$.

**Teorema 6.1.1.** *$V_\alpha$ es transitivo para todo $\alpha$.*

*Demostración.* Si $a \in V_\alpha$ y $b \in a$, entonces $rg(b) < rg(a) \leq \alpha$. Por lo tanto $b \in V_{rg(b)} \subset V_{rg(\alpha)} \subset V_\alpha$. □

DEFINICIÓN: Sea $\mathcal{C}$ una clase definida por la fórmula $\psi(x)$, diremos que $\mathcal{C}$ es **transitiva** si se cumple que $\forall a\ \forall b\ [(b \in a\ \wedge\ \psi(a))\ \rightarrow\ \psi(b)]$.

Del teorema anterior se sigue fácilmente el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.2.** *$\mathcal{V}$ es una clase transitiva.*

*Demostración.* Sea $x$ en $\mathcal{V}$ e $y \in x$ .Existe $\alpha$ tal que $x \in V_\alpha$. Como $V_\alpha$ es transitivo, $y \in V_\alpha$; por lo tanto $y$ está en $\mathcal{V}$. □

Veremos a continuación que la clase de los conjuntos regulares es cerrada por las operaciones del álgebra de conjuntos.

**Teorema 6.1.3.** *Si $x$ está en $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{P}(x)$, $\cup x$, $\{x\}$ están en $\mathcal{V}$ y el rango de estos conjuntos es menor estricto que $rg(x) \oplus \omega$.*

*Además, si $x$ e $y$ están en $\mathcal{V}$, entonces $x \times y$, $x \cup y$ y $y^x$ están en $\mathcal{V}$ y el rango de estos conjuntos es menor estricto que $\max\{rg(x), rg(y)\} \oplus \omega$.*

*Demostración.* Existe un ordinal $\beta$ tal que $rg(x) = \alpha = \beta \oplus 1$.

Como $x \in V_{\beta\oplus1} = \mathcal{P}(V_\beta)$, entonces $x \subset V_\beta$.

Si $y \in \mathcal{P}(x)$, entonces $y \subset x \subset V_\beta$, por consiguiente $y \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta\oplus1}$. Lo anterior muestra que $\mathcal{P}(x) \subset V_{\beta\oplus1}$, por lo tanto $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(V_{\beta\oplus1}) = V_{\beta\oplus2} = V_{\alpha\oplus1}$.

Si $y \in \cup x$, entonces existe $z$ en $x$ tal que $y \in z$. Como $V_\beta$ es transitivo e $y \in z \in x \subset V_\beta$, tenemos que $y \in V_\beta$. En consecuencia, $\cup x \subset V_\beta$ y se concluye que $\cup x \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta\oplus1} = V_\alpha$.

Sea $\alpha = \max\{rg(x), rg(y)\}$. Dado que $x$ e $y$ pertenecen a $V_\alpha$, $\{x, y\} \subset V_\alpha$, entonces $\{x, y\} \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha\oplus1}$.

De lo visto para la unión se deduce que $x \cup y = \cup\{x, y\} \in V_{\alpha\oplus1}$.

Como $V_{\alpha\oplus1}$ es transitivo, también tenemos que

$$x \times y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(V_{\alpha\oplus1}))) = V_{\alpha\oplus4}.$$

Lo anterior implica que $y^x \in \mathcal{P}(x \times y) \subset \mathcal{P}(V_{\alpha\oplus4}) = V_{\alpha\oplus5}$. □

**Corolario 6.1.4.** *Si $\alpha$ es un ordinal límite y $x \in V_\alpha$, entonces $\mathcal{P}(x)$, $\cup x$ y $\{x\}$ pertenecen a $V_\alpha$. Además, si $x$ e $y$ están en $V_\alpha$, entonces $x \times y$, $x \cup y$ e $y^x$ pertenecen a $V_\alpha$.*

*Demostración.* El teorema anterior muestra que $\cup x$, $\mathcal{P}(x)$, $\{x\}$, $x \times y$, $x \cup y$ e $y^x$ pertenecen todos a $V_{\beta\oplus5}$, con $\beta = \max rg(x), rg(y)$. Como $\alpha$ es límite y $\beta < \alpha$, entonces $(\beta \oplus 5) \in \alpha$. □

Si construimos los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ de la manera usual partiendo de del conjunto $\omega$ de los números naturales, obtenemos que todos estos conjuntos pertenecen a $V_{\omega\oplus\omega}$.

**Corolario 6.1.5.** *Sea $\beta$ un ordinal, entonces $\beta$ pertenece a $V_\alpha$ si y sólo si $\beta$ pertenece a $\alpha$.*

*Demostración.* Si $\beta \in \alpha$, entonces $\beta \in V_\alpha$ porque $\alpha \in V_{\alpha\oplus1}$.

Si $\beta \in V_\alpha$, entonces $\beta \oplus 1 = rg(\beta) \leq \alpha$. Por lo tanto $\beta \in \alpha$. □

DEFINICIÓN: Sea $\mathcal{C}$ una clase y $\varphi$ una fórmula. Definiremos $\varphi^{\mathcal{C}}$, $\varphi$ **restringida** o **relativa** a $\mathcal{C}$ como sigue:

I) si $\varphi$ es atómica, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = \varphi$

II) si $\varphi = \neg\psi$, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = \neg\varphi^{\mathcal{C}}$

III) si $\varphi = (\eta \ast \psi)$, donde $\ast$ es el símbolo $\rightarrow$, $\wedge$ o $\vee$, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = (\eta^{\mathcal{C}} \ast \psi^{\mathcal{C}})$

IV) si $\varphi = \forall x\ \psi(x)$, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = \forall x\ (\mathcal{C}(x) \to \psi^{\mathcal{C}}(x))$

V) si $\varphi = \exists x\ \psi(x)$, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = \exists x\ (\mathcal{C}(x) \wedge \psi^{\mathcal{C}}(x))$.

Esta definición nos será útil para obtener algunos resultados de consistencia relativa de distintos axiomas.

Uno de nuestros objetivos será mostrar que $\mathcal{V}$ es un modelo de ZFC$^+$ con respecto a ZFC, esto significa que partiendo de los axiomas de ZFC, podemos construir una clase en la cual los enunciados de los axiomas de ZFC restringidos y el enunciado del axioma de regularidad son verdaderos. Para llegar a este resultado, veremos primero algunos teoremas.

**Teorema 6.1.6.** *Si $x$ está en $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{P}(x)$, $\cup x$, $\{x\}$ están en $\mathcal{V}$ y el rango de estos conjuntos es menor estricto que $rg(x) \oplus \omega$.*

*Además, si $x$ e $y$ están en $\mathcal{V}$, entonces $x \times y$, $x \cup y$ y $y^x$ están en $\mathcal{V}$ y el rango de estos conjuntos es menor estricto que* $\max\{rg(x), rg(y)\} \oplus \omega$.

*Demostración.* Existe un ordinal $\beta$ tal que $rg(x) = \alpha = \beta \oplus 1$. (Ver comentario luego de la definición de conjunto regluar, Capítulo 5).

Como $x \in V_{\beta\oplus 1} = \mathcal{P}(V_\beta)$, entonces $x \subset V_\beta$.

Si $y \in \mathcal{P}(x)$, entonces $y \subset x \subset V_\beta$, por consiguiente $y \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta\oplus 1}$. Lo anterior muestra que $\mathcal{P}(x) \subset V_{\beta\oplus 1}$, por lo tanto $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(V_{\beta\oplus 1}) = V_{\beta\oplus 2} = V_{\alpha\oplus 1}$.

Si $y \in \cup x$, entonces existe $z$ en $x$ tal que $y \in z$. Como $V_\beta$ es transitivo e $y \in z \in x \subset V_\beta$, tenemos que $y \in V_\beta$. En consecuencia, $\cup x \subset V_\beta$ y se concluye que $\cup x \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta\oplus 1} = V_\alpha$.

Sea $\alpha = \max\{rg(x), rg(y)\}$. Dado que $x$ e $y$ pertenecen a $V_\alpha$, $\{x, y\} \subset V_\alpha$, entonces $\{x, y\} \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha\oplus 1}$.

De lo visto para la unión se deduce que $x \cup y = \cup\{x, y\} \in V_{\alpha\oplus 1}$.

Como $V_{\alpha\oplus 1}$ es transitivo, también tenemos que $x \times y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(V_{\alpha\oplus 1}))) = V_{\alpha\oplus 4}$.

Lo anterior implica que $y^x \in \mathcal{P}(x \times y) \subset \mathcal{P}(V_{\alpha\oplus 4}) = V_{\alpha\oplus 5}$.

□

**Corolario 6.1.7.** *Si $\alpha$ es un ordinal límite y $x \in V_\alpha$, entonces $\mathcal{P}(x)$, $\cup x$ y $\{x\}$ pertenecen a $V_\alpha$. Además, si $x$ e $y$ están en $V_\alpha$, entonces $x \times y$, $x \cup y$ e $y^x$ pertenecen a $V_\alpha$.*

*Demostración.* El teorema anterior muestra que $\cup x$, $\mathcal{P}(x)$, $\{x\}$, $x \times y$, $x \cup y$ e $y^x$ pertenecen todos a $V_{\beta\oplus 5}$, con $\beta = \max rg(x), rg(y)$. Como $\alpha$ es límite y $\beta < \alpha$, entonces $(\beta \oplus 5) \in \alpha$. □

Si construimos los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ de la manera usual partiendo de del conjunto de los números naturales, $\omega$ obtenemos que todos estos conjuntos pertenecen a $V_{\omega\oplus\omega}$.

**Corolario 6.1.8.** *Sea $\beta$ un ordinal, entonces $\beta$ pertenece a $V_\alpha$ si y sólo si $\beta$ pertenece a $\alpha$.*

*Demostración.* Si $\beta \in \alpha$, entonces $\beta \in V_\alpha$ porque $\alpha \in V_{\alpha \oplus 1}$.
Si $\beta \in V_\alpha$, entonces $\beta \oplus 1 = rg(\beta) \leq \alpha$. Por lo tanto $\beta \in \alpha$. □

A continuación obtendremos algunos resultados relacionados con clases transitivas. Dado que $\mathcal{V}$ es transitiva, estos resultados se aplican a $\mathcal{V}$ como caso particular.

Diremos que una clase $\mathcal{C}$ satisface un axioma A, cuando la restricción a $\mathcal{C}$ del enunciado de A es verdadero.

**Teorema 6.1.9.** *Cualquier clase transitiva satisface el Axioma de Extensionalidad.*

*Demostración.* El Axioma de Extensionalidad es $\forall x\ \forall y\ (\forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y)$.

El axioma restringido a $\mathcal{C}$ toma la forma $\forall x\ \forall y\ \{\mathcal{C}(x) \wedge \mathcal{C}(y) \rightarrow [\forall t\ (\mathcal{C}(t) \rightarrow (t \in x \leftrightarrow t \in y)) \rightarrow x = y]\}$.

Sean $x$ e $y$ en $\mathcal{C}$ tales que $x \neq y$, podemos suponer que existe $t$ tal que $t \in x$ y $t \notin y$. Como $\mathcal{C}$ es transitiva $x$ está en la clase y $t \in x$, tenemos $\mathcal{C}(t)$; es decir, $t$ está en la clase.

Lo anterior dice que si dos conjuntos en $\mathcal{C}$ son distintos no tienen los mismos elementos de $\mathcal{C}$ (hay al menos un elemento de $\mathcal{C}$ que está en uno pero no en el otro), por lo tanto que si dos conjuntos tienen los mismos elementos de $\mathcal{C}$ deben ser iguales y esto es el Axioma de Extensionalidad restringido a $\mathcal{C}$. □

**Teorema 6.1.10.** *Si $\mathcal{C}$ es una clase transitiva tal que $\mathcal{C}(x) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{P}(x))$, entonces el Axioma de Especificación vale en $\mathcal{C}$.*

*Demostración.* El Esquema de Especificación relativo a $\mathcal{C}$, para una fórmula $\varphi$ es $\forall x\ \{\mathcal{C}(x) \rightarrow \exists y\ [\mathcal{C}(y)\ \wedge\ (\forall t\ (\mathcal{C}(t) \rightarrow (t \in x\ \wedge\ \varphi^{\mathcal{C}}(t)\ ))\ \leftrightarrow\ t \in y)]\}$.

Si $x$ es un conjunto en $\mathcal{C}$, entonces $y = \{t \in x :\ \varphi^{\mathcal{C}}(t)\}$ es un conjunto que pertenece a $\mathcal{P}(x)$. Como por hipótesis $\mathcal{P}(x)$ está en $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}$ es transitiva, entonces $y$ está en $\mathcal{C}$, lo que prueba la veracidad de la fórmula del axioma. □

DEFINICIÓN: Sea $\mathcal{C}$ una clase y $\varphi$ una fórmula con $x_1, ..., x_n$ como variables libres. Diremos que $\varphi$ es **$\mathcal{C}$-absoluta** o que $\mathcal{C}$ **refleja** a $\varphi$ si es verdadera la fórmula

$$\forall x_1\ ...\ \forall x_n\ [\mathcal{C}(x_1)\ \wedge\ ...\ \wedge\ \mathcal{C}(x_n)\ \rightarrow\ (\varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{C}})]$$

Ejemplo: Sea $\varphi(z)$ la fórmula $\neg(\exists x\ (x \in z))$. Sea la clase dada por el conjunto $S = \omega \setminus \{\emptyset\}$. $1 \in S$ y $\varphi(1)^{\mathcal{C}}$ es verdadero porque $x \in 1$ si y sólo si $x = \emptyset$ pero $\emptyset \notin S$. Sin embargo $\varphi(1)$ es falso, por lo tanto $\varphi(z)$ no es $S$-absoluta.

Si $\varphi$ no tiene cuantificadores, entonces $\varphi$ es $\mathcal{C}$- absoluta para cualquier clase $\mathcal{C}$. Esto es por que si $\varphi$ no tiene cuantificadores resulta igual a $\varphi^{\mathcal{C}}$, cualquiera sea $\mathcal{C}$.

DEFINICIÓN: Los cuantificadores en una fórmula están **acotados** si son de la forma $\forall x\ (x \in y \ \rightarrow \ \psi(x))$ ó $\exists x\ (x \in y \ \wedge \ \psi(x))$.

La siguiente observación nos servirá para simplificar la demostración de teoremas donde las fórmulas que intervienen resultan $\mathcal{C}$-absolutas bajo ciertas hipótesis sobre $\mathcal{C}$.

Observación: Si todos los cuantificadores están acotados en $\varphi$, entonces para cualquier clase transitiva $\mathcal{C}$ tenemos que $\varphi$ es $\mathcal{C}$-absoluta.

Esto podemos comprobarlo con un argumento inductivo sobre la complejidad de la fórmula. Este argumento es válido por la forma en que construimos las fórmulas segun la cadena de formación de fórmulas presentada en el Capítulo 1.

Las fórmulas atómicas restringidas no varían su valor de verdad dado que no tienen cuantificadores.

Tanpoco cambia el valor de verdad de una fórmula que sea $\neg\psi$ ó $\psi$, $*$, $\eta$, con $*$ entre $\rightarrow$, $\wedge \vee$, siempre que $\psi$ y $\eta$ no cambian su valor de verdad cuando son restringidos.

Finalmente, si $\varphi$ es la fórmula $\forall x\ (x \in y \ \rightarrow \ \psi)$, $\varphi^{\mathcal{C}}$ será $\forall x\ [\mathcal{C}(x) \ \rightarrow \ (x \in y \ \rightarrow \ \psi^{\mathcal{C}})]$. En $\varphi$ la variable $y$ está libre, por lo tanto, para ver si $\varphi$ es $\mathcal{C}$-absoluta tenemos que verificar la veracidad de la fórmula $\forall y\ \forall x_1\ ...\ \forall x_n\ [\mathcal{C}(y) \ \wedge \ \mathcal{C}(x_1) \ \wedge \ ... \ \wedge \ \mathcal{C}(x_n) \ \rightarrow \ (\varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{C}})]$ donde $x_i$ con $i$ entre 1 y $n$ son las otras variables que están libres en $\psi$. Al considerar como hipótesis $\mathcal{C}(y)$, tenemos $\mathcal{C}(x)$ por la transitividad de $\mathcal{C}$, y esto muestra que en $\varphi^{\mathcal{C}}$ la parte $\mathcal{C}(x) \ \rightarrow \ ...$ es redundante bajo la hipótesis $\mathcal{C}(y)$. Por lo tanto, bajo la supocición de que $\psi$ sea $\mathcal{C}$-absoluta, $\varphi$ resulta $\mathcal{C}$-absoluta.

Lo mismo ocurre con una fórmula de la forma $\exists x\ (x \in y \ \wedge \ \psi)$: la parte $\mathcal{C}(x) \ \wedge \ ...$ en la fórmula $\varphi^{\mathcal{C}}$ es redundante bajo la hipótesis $\mathcal{C}(y)$.

Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula que permita definir una ralación funcional $y = F(x)$, esto es, que $\forall x\ \exists! y\ \varphi(x, y)$.

Sea $\mathcal{C}$ una clase y supongamos que $\forall x\ [\mathcal{C}(x) \ \wedge \ \exists! y\ (\mathcal{C}(y) \ \wedge \ \varphi(x, y))]$. Esto nos permite definir $y = F^{\mathcal{C}}(x)$.

Puede ocurrir (ver el ejemplo en la definición de $\mathcal{C}$-absoluta) que exista $x$ en $\mathcal{C}$ tal que $F(x) \neq F^{\mathcal{C}}(x)$. Sin embargo esto no ocurre si $\varphi$ es $\mathcal{C}$ absoluta.

DEFINICIÓN: Diremos que la **relación funcional** $F$ es **$\mathcal{C}$-absoluta** , si está definida por una fórmula $\mathcal{C}$-absoluta y satisface la condición de existencia y unicidad en $\mathcal{C}$.

Según la observación anterior si queremos ver que dada una clase transitiva $\mathcal{C}$ la fórmula $\varphi$ es $\mathcal{C}$-absoluta, bastará escribir una fórmula equivalente a ella donde los cuantificadores aparezcan acotados. Esto es lo que haremos en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 6.1.11.** *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface los axiomas de Especificación, Par y Unión; entonces las siguientes fórmulas y relaciones funcionales son $\mathcal{C}$-absolutas.*

*a)* $x \in y$

*b)* $x = y$

*c)* $x \subset y$

*d)* $\{x, y\}$

*e)* $\{x\}$

*f)* $\langle x, y\rangle$

*g)* $\emptyset$

*h)* $x \cup y$

*i)* $x \cap y$

*j)* $x \setminus y$

*k)* $x'$

*l)* $Trans(x)$

*m)* $\cup x$

*n)* $\cap x$

*Demostración.* *a)* y *b)* son triviales por ser fórmulas atómicas.
*c)* La fórmula $\forall t\ (t \in x \to t \in y)$ tiene todos sus cuantificadores acotados y $\mathcal{C}$ es transitiva; por lo tanto es $\mathcal{C}$-absoluta.
*l)* $Trans(x)$ es la fórmula $\forall y\ (y \in x\ \to\ \forall z\ (z \in y\ \to\ z \in x))$ en la que todos los cuantificadores aparecen acotados.

Por hipótesis, los conjuntos definidos por las fórmulas funcionales $\{x, y\}^{\mathcal{C}}$, $\{x\}^{\mathcal{C}}$, $\langle x, y\rangle^{\mathcal{C}}$, $\emptyset^{\mathcal{C}}$, $(x \cup y)^{\mathcal{C}}$, $(x \cap y)^{\mathcal{C}}$, $(x \setminus y)^{\mathcal{C}}$, $(x')^{\mathcal{C}}$ existen. Resta ver que coinciden con su correspondiente no relativo. Para ello escribiremos las respectivas fórmulas que los definen de manera que los cuantificadores queden acotados, lo que implica que las fórmulas sean $\mathcal{C}$-absolutas.
*d)* $z = \{x, y\}$ si y sólo si $y \in z\ \wedge\ x \in z\ \wedge\ \forall t\ (t \in z\ \to\ (t = x\ \vee\ t = y))$.

*e)* Este es un caso particular de *d)*
*f)* $z = \langle x, y\rangle$ si y sólo si $\exists s\ (s \in z \wedge\ s = \{x\})\ \wedge \exists s\ (s \in z \wedge\ s = \{x, y\})\ \wedge\ \forall s(s \in z\ \to\ (s = \{x\}\ \vee\ s = \{x, y\})$.

*g)* Podemos decir que $z = \emptyset$ si y sólo si $\forall t\ (t \in z \to t \neq t)$.

*h)* $z = x \cup y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in z \to (t \in x\ \vee\ t \in y))\ \wedge x \subset z\ \wedge\ y \subset z$.

*i)* $z = x \cap y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in x\ \to\ (t \in y\ \to t \in z))\ \wedge z \subset y\ \wedge\ z \subset x$.

*j)* $z = x \setminus y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in x\ \to (t \notin y\ \to t \in z))\ \wedge\ z \subset x\ \wedge\ z \cap y = \emptyset$.

*k)* Que $x' = x \cup \{x\}$ es consecuencia de *e)* y *h)*.

*m)* $y = \cup x$ si y sólo si $\forall s\ (s \in x\ \to\ s \subset y)\ \wedge \forall t\ (t \in y\ \to\ \exists s\ (s \in x\ \wedge\ t \in s))$.

*n)* $y = \cap x$ si y sólo si $\forall t\ (t \in x\ \to\ y \subset t)\ \wedge\ \exists s_0\ \{s_0 \in x\ \wedge\ \forall t\ [t \in s_0\ \to (\forall s\ (s \in x\ \to t \in s))] \to t \in y\}$. $\square$

**Teorema 6.1.12.** *En las mismas hipótesis del teorema anterior, las siguientes fórmulas y relaciones funcionales son $\mathcal{C}$-absolutas.*

*a)* $z$ *es un par ordenado*

*b)* $a \times b$.

*c)* $r$ *es una relación*

*d)* $Dom(r)$

*e)* $Im(r)$

*f)* $f$ *es función*

*g)* $f(x)$ *(ser imagen del elemento* $x$ *de una función* $f$*)*

*h)* $f$ *es función inyectiva*

*Demostración.* Observemos que si $\varphi(x, y)$ es $\mathcal{C}$-absoluta, y la relación funcional $y = F(s, t)$ es $\mathcal{C}$-absoluta, entonces la fórmula $\psi(x, s, t)$ dada por $\varphi(x, F(s, t))$ resulta $\mathcal{C}$-absoluta, puesto que a $\psi(x, s, t)$ podemos escribirla como $\varphi(x, y) \ \wedge \ (y = F(s, t))$ que es $\mathcal{C}$-absoluta.

Usando el teorema anterior, escribiremos las fórmulas de forma tal que los cuantificadores queden acotados, y algunas de las variables que aparezcan libres sean reemplazadas por relaciones funcionales $\mathcal{C}$-absolutas.
*a)* La fórmula que dice que "$z$ es un par ordenado"puede expresarse como $\exists x \ (x \in t \ \wedge \ t = \cup z) \ \wedge \ \exists y \ (y \in s \ \wedge \ s = \cup z) \ \wedge \ z = \langle x, y\rangle$. Por el teorema anterior las relaciones funcionales $\langle x, y\rangle$ y $\cup z$ son $\mathcal{C}$-absoluta; además los cuantificadores están acotados, por lo tanto la fórmula es $\mathcal{C}$-absoluta.

*b)* $c = a \times b$ si y sólo si $\forall x \ \forall y \ [(x \in a \wedge y \in b) \ \rightarrow \ \langle x, y\rangle \in c] \ \wedge \ \forall z \ [z \in c \ \rightarrow \ \exists x \ \exists y \ (x \in a \ \wedge \ y \in b \ \wedge \ z = \langle x, y\rangle)]$. En esta fórmula, todos los cuantificadores están acotados.

*c)*"$r$ es una relación" si y sólo si $\forall x \ (x \in r \ \rightarrow \ x$ "es un par ordenado" ). Los cuantificadores están acotados y "es un par ordenado" es $\mathcal{C}$-absoluta.

*d)* $a = dom(r)$ si y sólo si $\forall x \ [x \in a \ \rightarrow \ \exists y \ (y \in \cup\cup r \wedge \langle x, y\rangle \in r)] \wedge \forall x \ \forall y [(x \in \cup \cup r \ \wedge \ y \in \cup \cup r \ \wedge \langle x, y\rangle \in r) \ \rightarrow \ x \in a]$.

*e)* $b = rango(r)$ si y sólo si $\forall y \ (y \in b \ \rightarrow \ \exists x \ (x \in \cup\cup r \wedge \langle x, y\rangle \in r)] \wedge \forall x \ \forall y [(x \in \cup \cup r \ \wedge \ y \in \cup \cup r \ \wedge \langle x, y\rangle \in r) \ \rightarrow \ y \in b]$.

*f)* "$f$ es función" si y sólo si ($f$ es relación ) $\wedge \ \forall x \ \forall y \ \forall z \ [(x \in \cup \cup f \ \wedge \ y \in \cup \cup f \ \wedge \ z \in \cup \cup f) \ \rightarrow (\langle x, y\rangle \in f \ \wedge \ \langle x, z\rangle \in f \ \rightarrow \ y = z)]$.

*g)* $y = f(x)$ si y sólo si $\exists s \ (s \in f \ \wedge \ s = \langle x, y\rangle)$.

*h)* "$f$ es función inyectiva"si y sólo si ($f$ es función ) $\wedge \ \forall x \ \forall t \ [(x \in dom(f) \wedge t \in dom(f)) \ \rightarrow \ (r(x) = r(t) \ \rightarrow \ x = t)]$. □

**Teorema 6.1.13.** *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface los axiomas de Especificación, Par, Unión y Potencia. Sean $a$ y $r$ conjuntos en la clase $\mathcal{C}$ y supongamos que $r$ es un buen orden total en $a$ y que la fórmula que dice esto es $\varphi(a,r)$. Entonces la fórmula restringida $\varphi(a,r)^{\mathcal{C}}$ es verdadera.*

*Demostración.* La fórmula $\varphi(a,r)$ puede ser escrita como $[(r \subset a \times a) \wedge orden(a,r) \wedge total(a,r) \wedge bueno(a,r)]$ donde $orden(a,r)$ es la fórmula $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [\langle x,y\rangle \in r \wedge \langle y,z\rangle \in r) \rightarrow (\langle x,z\rangle \in r)]$ que dice que $r$ es un orden; $total(a,r)$ es $\forall x\, [x \in a \rightarrow \exists y\, (\langle x,y\rangle \in r)]$ que indica que un orden $r$ es total; y $bueno(a,r)$ es $\forall x\{x \in \mathcal{P}(a) \wedge a \neq \emptyset \rightarrow \exists y\, [(y \in x) \wedge \forall t\, (t \in x \wedge t \neq x \rightarrow \langle y,t\rangle \in r)]\}$, la fórmula que dice que un orden total $r$ es un buen orden en $a$.

Bajo estas hipótesis sobre $\mathcal{C}$, todas estas fórmulas, que definen buén orden, son $\mathcal{C}$-absolutas puesto que todos los cuantificadores en ellas se encuentran acotados y las fórmulas funcionales que aparecen son $\mathcal{C}$-absolutas. Por lo tanto $\varphi(a,r)$ es $\mathcal{C}$-absoluta. □

**Teorema 6.1.14.** *En las mismas hipótesis del teorema anterior, si $\omega$ está en la clase $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ satisface el Axioma del Infinito.*

*Demostración.* El Axioma del Infinito relativo a $\mathcal{C}$ es $\exists x\, \{\mathcal{C}(x) \wedge [\emptyset^{\mathcal{C}} \in x \wedge \forall t\, (\mathcal{C}(t) \rightarrow t \in x \rightarrow (t')^{\mathcal{C}} \in x)]\}$. Pero bajo estas hipótesis el Teorema 6.1.11 nos asegura que $\emptyset^{\mathcal{C}} = \emptyset$ y $(t')^{\mathcal{C}} = t'$, y como $\mathcal{C}(\omega)$ es verdadero tenemos que $\omega$ hace verdadero el axioma. □

**Teorema 6.1.15.** *Si $\alpha$ es un ordinal límite, entonces $V_\alpha$ satisface los axiomas de Extensionalidad, Especificación, Conjunto Vacío, Par , Unión, Potencia, Regularidad, Elección. Además, si $\alpha > \omega$, entonces $V_\alpha$ satisface el Axioma del Infinito.*

*Lo anterior afirma que si $\alpha > \omega$, entonces $V_\alpha$ es un modelo de $ZC^+$.*

*Demostración.* Sea $\alpha$ un ordinal límite. Por el Teorema 6.1.1, $V_\alpha$ es transitivo (como conjunto), por lo tanto transitiva como clase. El Teorema 6.1.9 afirma entonces que $V_\alpha$ satisface Extensionalidad. Si usamos el Corolario 6.1.7 y tenemos en cuenta que $V_\alpha$ es transitiva, es fácil comprobar que $V_\alpha$ satisface los axiomas de Unión, Par y Potencia.

Nos encontramos en las hipótesis del Teorema 6.1.10, por lo tanto $V_\alpha$ satisface Especificación.

El Axioma del Conjunto Vacío se satisface porque $\emptyset \in V_\alpha$.

Para ver que $V_\alpha$ satisface Axioma de Elección, mostraremos que $V_\alpha$ satisface el Principio de Buena Ordenación.

Sea $a$ un conjunto en $V_\alpha$; este conjunto puede ser bien ordenado y sea $r$ un buen orden para $a$. Tenemos que $r \subset a \times a \in V_\alpha$ y de esta manera nos hallamos en las hipótesis del Teorema 6.1.13, entonces $V_\alpha$ satisface el Principio de Buena Ordenación.

El Axioma de Regularidad vale en $V_\alpha$ por construcción.

La última afirmación es consecuencia del teorema 6.1.14. □

**Teorema 6.1.16.** *$\mathcal{V}$ es un modelo de $ZFC^+$.*

*Demostración.* La clase $\mathcal{V}$ es transitiva por el Teorema 6.1.2, por lo tanto satisface Extensionalidad. Además, por el Teorema 6.1.6, si $x$ está en $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{P}(x)$, y $\cup x$ también; por lo tanto satisface los axiomas de Potencia y Unión. El Axioma de Regularidad es verdadero en $\mathcal{V}$ por construcción. El Axioma de Elección sería verdadero en $\mathcal{V}$ si fuera verdadero el de Sustitución, porque este último implica Especificación y con esto estamos en las hipótesis del Teorema 6.1.13. Por lo tanto, sólo resta ver que $\mathcal{V}$ satisface Sustitución.

Sea $\varphi$ una fórmula con la variables $y_1$, ..., $y_n$, $x$, $y$ libres. En palabras, el Axioma Esquema de Sustitución relativo a $\mathcal{V}$ afirmaría que: si $a$ es un conjunto regular tal que para cada $x \in a$ existe un único conjunto regular $y$ que hace $\varphi(x,y)^{\mathcal{V}}$ verdadera, entonces existe un conjunto regular $b = \{y : \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}})\}^{\mathcal{V}}$[1]

Veamos que la afirmación es cierta. Consideremos la fórmula $\psi(x,y)$ dada por $\varphi(x,y)^{\mathcal{V}}\ \wedge\ \mathcal{V}(y)$. Tenemos que $\psi$ define una relación funcional. Luego, por el Axioma Esquema de Sustitución, existe un conjunto $b = \{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \psi(x,y))\} = \{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}}\ \wedge \mathcal{V}(y))\} = \{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}})\ \wedge \mathcal{V}(y)\} = \{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}})\}^{\mathcal{V}}$. Por lo tanto basta ver que $b$ es regular; pero esto es consecuencia del Teorema 5.1.1, ya que todos los elementos de $b$ son regulares. $\square$

**Teorema 6.1.17.** *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva tal que $\mathcal{C}(x)$ y $\mathcal{C}(x)$ implica $\mathcal{C}(\mathcal{P}(x))$, $\mathcal{C}(\cup x)$ y $\mathcal{C}(\{x,y\})$. Entonces las fórmulas $Ord(x)$ y $Card(x)$ son $\mathcal{C}$-absolutas.*

*Demostración.* Para ver que "ser ordinal" es $\mathcal{C}$-absoluta, debemos ver que $Trans(x)$, $Ord1(x)$, $Ord2(x)$ y $Ord3(x)$ son $\mathcal{C}$-absolutas. Sabemos que en estas hipótesis $\mathcal{C}$ satisface Extensionalidad y Especificación. Como $\mathcal{C}$ es transitiva y satisface Extensionalidad, Par y Unión, por el Teorema 6.1.11 $Trans(x)$ es $\mathcal{C}$ absoluta.

En $Ord1(x)$ y $Ord2(x)$ los cuantificadores están acotados, y como $\mathcal{C}$ es transitiva, se sige que estas dos fórmulas son $\mathcal{C}$-absolutas.

Resta probar que $Ord3(x)$ es $\mathcal{C}$-absoluta, o sea que la fórmula

$$\forall u\ \{(u \subset a\ \wedge\ u \neq \emptyset)\ \rightarrow\ \exists z\ [z \in u\ \wedge\ \forall x\ (x \in u\ \wedge\ x \neq\ z\ \rightarrow\ z \in x)]\}$$

y su restirngida a $\mathcal{C}$,

$$\forall u\ \{\mathcal{C}(u)\ \rightarrow$$
$$[(u \subset x \wedge u \neq \emptyset^{\mathcal{C}})\ \rightarrow\ \exists z\ [\mathcal{C}(z) \wedge z \in u \wedge \forall t\ (\mathcal{C}(t)\ \rightarrow\ (t \in u \wedge t \neq\ z\ \rightarrow\ z \in t))]]\},$$

tienen el mismo valor de verdad cuando $x$ está en la clase $\mathcal{C}$.

Por hipótesis, que $x$ esté en la clase implica que $\mathcal{P}(x)$ también, por consiguiente si $u \subset x$, $u \in \mathcal{P}(x)$ y como $\mathcal{C}$ es transitiva $u$ está en $\mathcal{C}$. Esto muestra que $\mathcal{C}(u)$ es redundante. En las demás partes de la fórmula, vemos que $\mathcal{C}(z)$ no varia la verdad de la fórmula porque $z \in u$ y $u$ está en $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}(t)$ tampoco porque se toma $t \in u$. El Vacío restringido coincide con el Vacío, de acuerdo

[1]Notar que si $\varphi(x)$ es una fórmula con la variable $x$ libre y $\mathcal{C}$ es un clase la fórmula $\{x :\ \varphi(x)\}^{\mathcal{C}}$ es equivalente a $\{x : \varphi(x)\ \wedge\ \mathcal{C}(x)\}$; esto es, la clase de los $x$ que satisfacen $\varphi(x)$ y que están en la clase $\mathcal{C}$.

con el Teorema 6.1.11. Por lo tanto, todos los signos que se agregaron por la relativización son redundantes si suponemos que $x$ está en la clase.

Hemos probado que $Ord(x)$ es $\mathcal{C}$-absoluta. Ahora veremos que la fórmula $Card(x)$ es $\mathcal{C}$-absoluta.

Primero veremos que si $\gamma$ está en $\mathcal{C}$, $Card(\gamma)$ implica $Card(\gamma)^{\mathcal{C}}$. Supongamos que $\gamma$ es un cardinal que está en la clase $\mathcal{C}$, entonces $\gamma$ es un ordinal; por lo visto anteriormente $\gamma$ es un ordinal relativo a $\mathcal{C}$. No existe una biyección de $\gamma$ en cualquier ordinal menor. Como no hay ordinales relativos a $\mathcal{C}$ que no sean ordinales, tenemos que no hay biyección para los ordinales relativos a $\mathcal{C}$ menores que $\gamma$. Por lo tanto $Card(a)^{\mathcal{C}}$ es verdadera.

Supongamos que $\gamma$ es un ordinal que no es cardinal. Entonces existe una biyección $f$ de $\gamma$ en un ordinal $\beta \in \gamma$. Como $f \subset \gamma \times \beta \subset \gamma \times \gamma$ y $\gamma \times \gamma$ está en $\mathcal{C}$, entonces $f$ está en $\mathcal{C}$ por pertenecer a $\mathcal{P}(\gamma \times \gamma)$. Por otra parte, ser biyección es $\mathcal{C}$-absoluta por lo tanto $\gamma$ tampoco es un cardinal relativo a $\mathcal{C}$. □

Hemos usado el Axioma Esquema de Sustitución para probar que todo conjunto bien ordenado es similar a un ordinal (Teorema 3.2.3. El resultado siguiente muestra que ZC$^+$ no es suficiente para probarlo.

**Teorema 6.1.18.** *$V_{\omega\oplus\omega}$ es un modelo de ZC$^+$ en el que existen conjuntos bien ordenados no similares a un ordinal.*

*Demostración.* Sabemos que $V_{\omega\oplus\omega}$ es un modelo de ZC$^+$. La condición de isomorfismo es $V_{\omega\oplus\omega}$-absoluta puesto que la de función biyectiva lo es y en la condición de conservar el orden tiene todos los cuantificadores acotado y la fórmula $f(x)$ (ser imagen de un $x$ por una función) es $V_{\omega\oplus\omega}$-absoluta. Mostraremos ahora que existe un conjunto bien ordenado que no es similar a ningún ordinal.

Si $r$ es un buen orden para $\omega$, entonces $r \subset \omega \times \omega$; por el Teorema 6.1.6 $\mathcal{P}(\omega \times \omega) \in V_{\omega\oplus\omega}$ por lo tanto $r \in V_{\omega\oplus\omega}$. Por otra parte, $r$ es un buen orden relativo a $V_{\omega\oplus\omega}$ por el Teorema 6.1.13. Consideremos el buen orden para $\omega$ dado por $x \preceq y$ si $x$ es par e $y$ impar, o si $x \leq y$ siendo ambos pares o ambos impares. Este buen orden es isomorfo al único ordinal $\omega \oplus \omega$, pero $\omega \oplus \omega \notin V_{\omega\oplus\omega}$ y la noción de isomorfismo es $V_{\omega\oplus\omega}$-absoluta. □

## 6.2. Cardinales fuertemente inaccesibles

En lo que sigue $\lambda$ denotará un cardinal que satisface las dos condiciones siguientes:

I$_1$ si $\gamma$ es un cardinal y $\gamma < \lambda$, $2^\gamma < \lambda$,

I$_2$ si $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ es una familia de cardinales tal que $\gamma_i < \lambda$ para todo $i \in I$ y $card(I) < \lambda$, entonces $\sup_{i\in I} \gamma_i < \lambda$.

Observemos que $\omega$ satisface I$_1$ e I$_2$.

**Lema 6.2.1.** *Si $\lambda$ satisface $I_1$ e $I_2$, entonces $card(V_\lambda) = \lambda$, y para todo conjunto $a$, $a$ pertenece a $V_\lambda$) si y sólo si $a$ es un subconjunto de $V_\lambda$ y $card(a) < \lambda$.*

*Demostración.* Como $\lambda \subset V_\lambda$, entonces $\lambda = card(\lambda) \leq card(V_\lambda)$.

Observemos que si $\alpha < \lambda$, entonces $card(V_\alpha) < \lambda$. En efecto, supongamos que esto es falso, y sea $\alpha$ el primer ordinal menor que $\lambda$ tal que $card(V_\alpha) \geq \lambda$.

$$card(V_\alpha) = card(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)) \leq \sum_{\beta<\alpha} card(\mathcal{P}(V_\beta)) =$$

$$\text{máx}\{card(\alpha)\ ,\ \sup_{\beta<\alpha} 2^{card(V_\beta)}\} < \lambda,$$

contradiciendo la elección de $\alpha$.

De la definición se desprende que $\lambda$ es límite. Luego, $V_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha$, por consiguiente,

$$card(V_\lambda) = card(\bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha) = \sup_{\alpha\in\lambda} card(V_\alpha) \leq \lambda.$$

Para demostrar la otra parte, sea $a \in V_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha$. Entonces existe $\alpha \in \lambda$ tal que $a \in V_\alpha$, lo que implica que $card(a) \leq card(V_\alpha) < \lambda$. Para probar la recíproca, supongamos que $a \subset V_\lambda$ y $card(a) < \lambda$. Consideremos la función $f$ definida sobre $a$ y dada por $f(x) = card(rg(x))$. Tenemos que $f(x) < \lambda$ para todo $x \in a$ y además $card(a) < \lambda$, por lo tanto $\rho = \sup_{x\in a} f(x) < \lambda$. Si $x \in a$, $f(x) \leq \rho$, entonces $rg(x) < 2^\rho$ y tenemos que $x \in V_{2^\rho}$. De lo anterior se deduce que $a \in \mathcal{P}(V_{2^\rho}) = V_{2^\rho \oplus 1}$, y dado que $2^\rho \oplus 1 < \lambda$, tenemos $a \in V_\lambda$. $\square$

**Lema 6.2.2.** *Si $\lambda$ satisface $I_1$ e $I_2$, entonces $V_\lambda$ satisface el Axioma de Sustitución.*

*Demostración.* Supongamos que valen las hipótesis del Axioma de Sustitución relativo a $V_\lambda$; esto es, dada una fórmula $\varphi(x,y)$, para todo conjunto $a$ en $V_\lambda$ en el que $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$ sea funcional, es decir, para todo $x \in a$[2] existe un único $y \in V_\lambda$ tal que $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$. Lo que debemos ver es que existe un conjunto $b$ en $V_\lambda$ tal que tiene a todo $y$ de $V_\lambda$ tal que vale $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$ para algún $x$ en $a$.

Por el Axioma de Sustitución existe el conjunto

$$b = \{y:\ \exists x\ (x \in a)\ \wedge\ (\varphi(x,y)^{V_\lambda})\}.$$

Tenemos que mostrar que $b$ pertenece a $V_\lambda$.

Por hipótesis, si $x \in a$ y $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$, entonces $y \in V_\lambda$; por lo tanto $b \subset V_\lambda$.

Por otra parte, podemos construir una $f\colon a \to b$ sobreyectiva dada por $f(x) = y$ donde $y$ es tal que $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$.

Lo anterior dice que $card(b) \leq card(a)$. Como $a \in V_\lambda$, el Lema 6.2.1 implica que $card(a) < \lambda$, entonces $card(b) < \lambda$. Si usamos nuevamente el resultado del Lema 6.2.1 obtenemos que $b \in V_\lambda$ y con esto que el Axioma de Sustitución relativo a $V_\lambda$ es verdadero. $\square$

Con los Teorema 6.1.15 y 6.2.2 se demuestra el siguiente resultado.

[2] Aquí debería ir $x \in a \cap V_\lambda$, pero como $V_\lambda$ es transitivo, $a = a \cap V_\lambda$.

**Teorema 6.2.3.** *Si $\lambda$ satisface $I_1$ e $I_2$ y $\lambda > \omega$ , entonces $V_\lambda$ es un modelo de ZFC$^+$.*

**Teorema 6.2.4.** *$V_\omega$ satisface los axiomas de ZFC$^+$ menos el Axioma de Infinito. Más precisamente, satisface que no existe un conjunto inductivo en $V_\omega$.*

*Demostración.* Por los teoremas anteriores lo único que nos falta probar es que $V_\omega$ satisface la inexistencia de un conjunto inductivo relativo a $V_\omega$. En la demostración del Teorema 6.1.14 vemos que $Ind(x)$ es $V_\alpha$-absoluta para todo $\alpha$, por lo tanto decir inductivo que pertenece a $\omega$ o inductivo relativo a $V_\alpha$ es lo mismo. Supongamos que $x$ pertenece a $V_\omega$ y $x$ es inductivo. Como $\omega$ es un subconjunto de $x$ y vale el Axioma de las Partes, $\omega \in \mathcal{P}(x) \in V_\omega$, y por ser $V_\omega$ transitivo tendríamos que $\omega \in V_\omega$ que es absurdo. □

Diremos que $\lambda$ es un cardinal **fuertemente inaccesible** si $\lambda > \omega$ y satisface las propiedades $\mathrm{I}_1$ y $\mathrm{I}_2$.

**Teorema 6.2.5.** *Es imposible demostrar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles en la axiomática ZFC$^+$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{U}$ un modelo de la teoría de conjuntos ZFC$^+$. Supongamos que existe un cardinal fuertemente inaccesible en $\mathcal{U}$. Sea $\pi$ el primer cardinal fuertemente inaccesible.

Consideremos el conjunto $V_\pi$. Por el Teorema 6.2.3 este conjunto es un modelo de ZFC$^+$. Resta ver que no hay cardinales fuertemente inaccesibles relativos. Por el Teorema 6.1.17, todos los cardinales que pertenecen a $V_\pi$ son cardinales relativos a $V_\pi$ y biceversa. En $V_\pi$ no hay cardinales fuertemente inaccesibles porque $\pi \notin V_\pi$ y $\pi$ es el primero. Por lo tanto, si $\gamma \in \pi$, entonces alguna de las condiciones de inaccesibilidad debe fallar, o sea, al menos una de las siguientes debe cumplirse y todas ellas conducen a que el cardinal tampoco sea inaccesible relativo a $V_\pi$:

1. $\gamma \leq \omega$, indica que $\gamma$ tampoco es inaccesible relativo a $V_\pi$.

2. Existe $\beta \in \gamma$ tal que $2^\beta \geq \gamma$, y como $\beta \in V_\pi$ por el Lema 6.2.1 tenemos que $2^\beta \in V_\beta$; por consiguiente $\gamma$ no es un cardinal fuertemente inaccesible relativo.

3. Existe una familia $\{\beta_i\}_{i\in I}$ tal que $card(I) < \gamma$ y para todo $i \in I$, $\beta_i < \gamma$, pero sin embargo $\gamma \leq \bigcup_{i\in I} \beta_i$. En este caso, la familia $\{\beta_i\}_{i\in I} \subset I \times \gamma \subset \gamma \times \gamma$ y $\gamma \times \gamma \in V_\pi$ por el Teorema 6.1.6. La familia pertenece a $V_\pi$ por ser $V_\pi$ transitivo y esto implica que $\gamma$ tampoco puede ser fuertemente inaccesible relativo a $V_\pi$.

□