Capítulo 7

Consistencia del Axioma de Elección

En este Capítulo nos proponemos mostrar que a partir de un modelo de ZF^{+} se puede construir un modelo de ZFC^{+}. Esto significa si hubiese una inconsistencia en la teoría de conjuntos ésta no se debería al Axioma de Elección. Este importante resultado fue obtenido por Kurt Gödel en 1940. El modelo que se mostrará no es el original de Gödel, formado por los *conjuntos constructibles*, sino por otro algo más simple, formado por los *conjuntos definibles por ordinales* que fue sugerido por el mismo Gödel en 1946.

7.1. Algunas nociones preliminares

En §1.2 para definir las fórmulas utilizamos los conectivos proposicionales $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$ y los cuantificadores universal $\forall$ y existencial $\exists$. En realidad basta considerar los conectivos $\wedge, \neg$ y el cuantificador existencial $\exists$, pues los restantes pueden definirse a partir de éstos. En efecto, para fórmulas φ, ψ y variable x se tiene que:

1. $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
2. $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$,
3. $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$.

Por lo tanto podemos considerar las expresiones que figuran a la izquierda de las equivalencias anteriores como abreviaturas de las correspondientes de la derecha, y por lo tanto considerar que en las fórmulas sólo figuran los conectivos $\neg$ y $\wedge$ y el cuantificador existencial $\exists$.

Llamaremos **grado de complejidad de una fórmula** φ, y lo denotaremos por *comp* (φ), al número de conectivos y cuantificadores que figuran en φ, contados tantas veces como aparezcan.

Observemos que:

1. *comp* $(\varphi) = 0$ si y sólo si φ es una fórmula atómica,
2. *comp* $(\neg\varphi) =$ *comp* $(\varphi) + 1$,
3. *comp* $(\varphi \wedge \psi) =$ *comp* $(\varphi) +$ *comp* $(\psi) + 1$,
4. *comp* $(\exists x\varphi) =$ *comp* $(\varphi) + 1$.

Diremos que una lista de fórmulas $\phi_1 \ldots \phi_n$ es **cerrada por subfórmulas** sí, y sólo si, toda subfórmula de cualquier fórmula de la lista figura en $\phi_1 \ldots \phi_n$. Por ejemplo, cualquier cadena de formación de una fórmula es cerrada por subfórmulas.

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ clases tales que todo conjunto de la clase $\mathcal{M}$ está en la clase $\mathcal{N}$ (para abreviar, $\mathcal{M}$ "$\subseteq$" $\mathcal{N}$). Diremos que una fórmula $\varphi(x_0, \ldots, x_k)$ es $\mathcal{M},\mathcal{N}$-absoluta si

$$\forall x_0 \forall x_1 \cdots \forall x_k[(\mathcal{M}(x_0) \ \wedge \ \mathcal{M}(x_1) \ \wedge \cdots \wedge \ \mathcal{M}(x_k)) \rightarrow$$

$$(\varphi^{\mathcal{M}}(x_0, \ldots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{N}}(x_0, \ldots, x_k))].$$

Observemos que las fórmulas $\mathcal{C}$-absolutas que habíamos considerado hasta ahora son $\mathcal{C},\mathcal{U}$-absolutas, donde $\mathcal{U}$ es el universo de la teoría de conjuntos.

Lema 7.1.1. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ clases tales $\mathcal{M}$ "$\subseteq$" $\mathcal{N}$). Si $\phi_1 \ldots \phi_n$ es una lista de fórmulas cerrada por subfórmulas, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para todo $1 \leq i \leq n$, ϕ_i es $\mathcal{M},\mathcal{N}$-absoluta.

(ii) Si ϕ_i es de la forma $\exists y \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k)$, entonces

$$\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_k[(\mathcal{M}(y_1) \ \wedge \ \mathcal{M}(y_2) \ \wedge \ \mathcal{M}(y_k)) \rightarrow$$

$$(\exists x(\mathcal{N}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1 \ldots, y_k)) \rightarrow \exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_k))].$$

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Fijemos $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{M}$ y supongamos que ϕ_i es de la forma $\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ y que $\exists x(\mathcal{N}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_n))$.

Entonces, $\phi_i^{\mathcal{N}}(y_1, \ldots, y_n)$ es verdadera, y por (i), $\phi_i^{\mathcal{M}}(y_1, \ldots, y_n)$ es verdadera. Luego es verdadera

$$\exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{M}}(x, y_1, \ldots, y_n))$$

y como por (i) $\phi_j^{\mathcal{M}} \leftrightarrow \phi_j^{\mathcal{N}}$, también es verdadera

$$\exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_n)),$$

lo que prueba (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). Veremos que se satisface (i) por inducción sobre la complejidad de ϕ_i (i=1,2, ..., n).

Supongamos que hemos verificado (i) para todas las fórmulas de la lista de complejidad menor que la complejidad de ϕ_i. En particular, suponemos válido (i) para todas las subfórmulas de ϕ_i.

Si ϕ_i es una fórmula atómica, no hay nada que probar, pues $\phi_i = \phi_i^{\mathcal{M}} = \phi_i^{\mathcal{N}}$.

Los casos $\phi_j \wedge \phi_k$, $\neg\phi_j$ salen por la hipótesis inductiva y la definición de restricción de una fórmula a una clase.

Supongamos ahora que $\phi_i = \exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ y fijemos $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{M}$.

$$\begin{array}{lcl}
 & \phi_i^{\mathcal{M}}(y_1, \ldots, y_n) & \\
\leftrightarrow & \exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{M}}(x, y_1, \ldots, y_n) & [\text{ Definición de restricción}] \\
\leftrightarrow & \exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_n) & [\text{ por hipótesis inductiva sobre } \phi_j] \\
\leftrightarrow & \exists x(\mathcal{N}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_n) & [\rightarrow) \ \mathcal{M} \text{ “}\subseteq\text{” } \mathcal{N} \text{ y } \leftarrow) \text{ por (ii)}] \\
\leftrightarrow & \phi_i^{\mathcal{N}}(y_1, \ldots, y_n) & [\text{ Definición de restricción}]
\end{array}$$

□

Teorema 7.1.2. *Supongamos que $\mathcal{W}$ es una clase, y que para cada ordinal α, W_α es un conjunto. Supongamos, además, que*

(i) Si $\alpha < \beta$, entonces $W_\alpha \subset W_\beta$,

(ii) Si γ es un ordinal límite, entonces $W_\gamma = \bigcup_{\alpha\in\gamma} W_\alpha$,

(iii) “$\mathcal{W} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} W_\alpha$”.

Entonces, para toda lista de fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ vale la siguiente afirmación:

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha(\phi_1, \ldots, \phi_n \textit{ son } W_\beta, \mathcal{W}\textit{-absolutas}).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ es cerrada por subfórmulas. Para cada i, $1 \leq i \leq n$ definimos la aplicación F_i : **On** $\rightarrow$ **On** del siguiente modo:

Si ϕ_i es de la forma $\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$, sea $\psi(x, y_1, \ldots, y_l)$ la fórmula

$$\mathcal{W}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{W}}(x, y_1, \ldots, y_l),$$

y definamos

$$G_i(y_1, \ldots, y_l) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \neg\exists x\psi(x, y_1 \ldots, y_l), \\ \text{el menor } \eta \text{ tal que} \exists x \in W_\eta \phi_j^{\mathcal{W}}(x, y_1, \ldots, y_l) & \text{si } \exists x\psi(x, y_1, \ldots, \psi y_l). \end{cases}$$

y $F_i(\alpha) = sup\{G_i(b_1, \ldots, b_l) : b_1, \ldots, b_l \in W_\alpha\}$

Por el *axioma de Sustitución* podemos afirmar que este supremo existe.

Si ϕ_i no es de la forma indicada, definimos $F_i(\alpha) = 0$.

Por el lema 7.1.1, si β es ordinal límite y para todo i vale $\forall\alpha < \beta(F_i(\alpha) < \beta)$, entonces $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son $W_\beta, \mathcal{W}$-absolutas.

Entonces para completar la demostración basta probar que dado α podemos encontrar un ordinal límite $\beta > \alpha$ tal que $F_i(\alpha) < \beta$ para $1 \leq i \leq n$.

Fijemos α y definamos

$\beta_0 = \alpha,$
$\beta_{p\oplus 1} = max(\beta_p \oplus 1, F_1(\beta_p), \ldots, F_n(\beta_p))$

De esta manera hemos definido a β_p por recursión para todo $p \in \omega$. Sea, ahora, $\beta = \bigvee_{p\in\omega} \beta_p$. Como $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \ldots$, resulta que β es un ordinal límite mayor que α. Además,

$$\gamma < \gamma' \Rightarrow F_i(\gamma) < F_i(\gamma').$$

Y si $\gamma < \beta$, $\gamma < \beta_p$, para algún $p \in \omega$, $F_i(\gamma) \leq F_i(\beta_p) \leq \beta_{p\oplus 1} < \beta$ □

Tomemos $\mathcal{W}_\alpha = V_\alpha$ y $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, y supongamos que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son enunciados, esto es, fórmulas sin variables libres. Entonces, en ZF podemos probar que

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha\, (\phi_1^{V_\beta} \leftrightarrow \phi_1) \wedge \cdots \wedge (\phi_n^{V_\beta} \leftrightarrow \phi_n).$$

En particular, si ϕ_i es un axioma, entonces ϕ_i es un enunciado verdadero en ZF. Luego,

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha\, (\phi_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\beta}).$$

Más generalmente:

Corolario 7.1.3. *Sea S un conjunto de axiomas que extienden ZF (por ejemplo, S podría contener a los axiomas de ZF más el axioma de elección o el axioma de regularidad, la no existencia de un cardinal fuertemente inaccesible, etc.), y sean $\phi_1, \ldots, \phi_n$ axiomas de S. Entonces en ZF se demuestra que*

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha\, (\phi_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\beta}).$$

Ahora veremos que las teorías ZF y ZFC **no son** finitamente axiomatizables:

Corolario 7.1.4. *Sea S un conjunto de axiomas que extiende a ZF y $\phi_1, \ldots, \phi_n$ axiomas de S. Si a partir de $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se pueden probar todos los axiomas de S, entonces S no es consistente.*

Demostración. Supongamos que a partir de $\phi_1, \ldots, \phi_n$ podemos probar todos los axiomas de S.

Sea β el primer ordinal tal que

$$\phi_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\beta}.$$

La existencia de tal β está garantizada por el Corolario 7.1.3. Entonces todos los axiomas de S se cumplen en V_β. Como S extiende a ZF, todos los resultados que vimos sobre fórmulas absolutas valen (interpretados) en V_β. En particular, como $x \in V_\alpha$ puede escribirse:

$$On(\alpha) \wedge \exists y (y \text{ es función } \wedge dom(y) = \alpha \oplus 1 \wedge$$

$$\forall\gamma[\gamma \in \alpha \oplus 1 \to (f(\gamma) = \bigcup_{\delta\in\beta} \mathcal{P}(y(\delta) \wedge x \in y(\gamma))]$$

resulta que si $\alpha \in \beta$, V_α es V_β absoluta. Entonces ${V_\alpha}^{V_\beta} = V_\alpha \cap V_\beta = V_\alpha$. Como S permite probar

$$\exists\alpha\, \phi_1^{V_\alpha} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\alpha},$$

debe ser válido en V_β la siguiente proposición:

$$\exists\alpha < \beta\, \phi_1^{V_\alpha} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\alpha},$$

lo que contradice la elección de β. □

7.2. Relaciones definibles por fórmulas

Dado un conjunto a, $Df(a,n)$ será el conjunto de relaciones n-arias sobre a que son definibles por medio de una fórmula ϕ de primer orden relativizada a a. Más precisamente, $Df(a,n)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de a^n de la forma

$$\{(x_1,\ldots,x_n) \in a^n : \phi^a(x_1,\ldots,x_n)\},$$

para alguna fórmula ϕ con n variables libres.

Veamos como se puede formalizar esto en ZF, esto es, sin usar el Axioma de Elección.

Definición 7.2.1. *Sean a un conjunto, $n \in \omega$ e $i, j < n$, entonces*

(a) $Proj(a,r,n) = \{s \in a^n : \exists t \in r(t|_n = s)\}$.

(b) $Diag_\in(a,n,i,j) = \{s \in a^n : s(i) \in s(j)\}$.

(c) $Diag_=(a,n,i,j) = \{s \in a^n : s(i) = s(j)\}$.

(d) Por recursión sobre $k \in \omega$ definimos $Df'(k,a,n)$ (para todo n simultáneamente) por:

$$Df'(0,a,n) = \{Diag_\in(a,n,i,j) : i,j < n\} \cup \{Diag_=(a,n,i,j) : i,j < n\},$$

$$Df'(k+1,a,n) = Df'(k,a,n) \cup \{a^n \setminus r : r \in Df'(k,a,n)\} \cup$$
$$\{r \cap s : r,s \in Df'(k,a,n)\} \cup \{Proj(a,r,n) : r \in Df'(k,a,n+1)\}.$$

(e) $Df(a,n) = \bigcup_{k\in\omega} Df'(k,a,n)$.

Lema 7.2.1. *Si $r, s \in Df(a,n)$, entonces $a^n \setminus r \in Df(a,n)$ y $r \cap s \in Df(a,n)$. Si $r \in Df(a,n+1)$, entonces $Proj(a,r,n) \in Df(a,n)$.*

Lema 7.2.2. *Sea $\phi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ una fórmula cuyas variables libres figuren entre $x_0,\ldots,x_{n-1}$. Entonces,*

$$\forall a[\{s \in a^n : \phi^a(s(o),\ldots,s(n-1))\} \in Df(a,n)]. \quad (7.1)$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre $comp(\phi)$.

Si ϕ es $x_i \in x_j$, $i,j < n$, entonces (7.1) es consecuencia del hecho que $Diag_{\in}(a,n,i,j) \in Df(a,n)$. Análogamente, si ϕ es $x_i = x_j$, (7.1) vale pues $Diag_{=}(a,n,i,j) \in Df(a,n)$.

Supongamos ahora que (7.1) vale para toda fórmula de grado de complejidad inferior a ϕ.

Si $\phi = \neg\psi$ ó $\phi = (\psi \wedge \eta)$, por la hipótesis inductiva, (7.1) vale para ψ y para η, y en consecuencia, también vale para ϕ, pues $Df(a,n)$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(a^n)$ cerrado por complementos e intersecciones.

Si $\phi = \exists y\psi$, como y no es variable libre en ϕ, se tiene que $y \notin \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$. Si y no es variable libre de ψ, entonces ϕ y ψ son equivalentes, y por la hipótesis inductiva, (7.1) vale para ϕ. Si por el contrario, y es libre en ψ, podemos renombrar y por x_n. Luego, $r = \{t \in a^{n+1} : \psi^a(t(0), \ldots, t(n))\} \in Df(a, n+1)$, y podemos afirmar que $Proj(a,r,n) \in Df(a,n)$. Pero

$$Proj(a,r,n) = \{s \in a^n : \exists t \in r(t|_n = s)\} =$$

$$\{s \in a^n : \exists b \in a\psi(s(0), \ldots, s(n-1), b)\} = \{s \in a^n : \phi^a(s(0), \ldots, s(n-1))\},$$

por lo que podemos concluir que (7.1) vale para ϕ. □

Nos proponemos ahora probar que para todo conjunto a y $n \in \omega$, $Df(a,n)$ es un conjunto numerable. Para eso definiremos por inducción en $m \in \omega$ los conjuntos $E(m,a,n)$ del modo siguiente:

(a) Si $m = 2^i \cdot 3^j$ e $i,j < n$, entonces $E(m,a,n) = Diag_{\in}(a,n,i,j)$.

(b) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ e $i,j < n$, entonces $E(m,a,n) = Diag_{=}(a,n,i,j)$.

(c) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2$, entonces $E(m,a,n) = a^n \setminus E(i,a,n)$.

(d) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, entonces $E(m,a,n) = E(i,a,n) \cap E(j,a,n)$.

(e) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, entonces $E(m,a,n) = Proj(a, E(i,a,n+1), n)$.

(f) Si m no es de la forma especificada en alguno de los incisos (a)-(e), entonces $E(m,a,n) = \emptyset$.

Lema 7.2.3. *Para todo conjunto a y todo $n \in \omega$,*

$$Df(a,n) = \{E(m,a,n) : m \in \omega\}.$$

Demostración. (a) $\underline{\forall n \in \omega(E(m,a,n) \in Df(a,n)), \text{ para todo } m \in \omega.}$

Haremos la demostración por inducción sobre m.
En efecto, $E(0,a,n) = \emptyset \in Df(a,n)$, pues $Df(a,n)$ es cerrado por complementos y por intersección. Supongamos que para $k \in \omega$, $\forall n \in \omega(E(k,a,n) \in Df(a,n))$. Entonces,

(1) Si $k+1 == 2^i \cdot 3^j$ e $i,j < n$, entonces $E(k+1,a,n) = Diag_{\in}(a,n,i,j) \in Df(a,n)$.

(2) Si $k+1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ e $i,j < n$, entonces $E(m,a,n) = Diag_{=}(a,n,i,j) \in Df(a,n)$.

(3) Si $k+1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, entonces $E(k+1a,n) = E(i,a,n) \cap E(j,a,n) \in Df(a,n)$, por la hipótsesis inductiva y dado que $Df(a,n)$ es cerrado por intersecciones.

(4) Si $k+1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, entonces

$$E(k+1,a,n) = Proj(a, E(i,a,n+1), n).$$

Como, por la hipótesis inductiva $E(i,a,n+1) \in Df(a,n+1)$, resulta que $Proj(a, E(i,a,n+1), n) \in Df(a,n)$.

(5) Si m no es de la forma especificada en alguno de los incisos (a)-(e), entonces $E(m,a,n) = 0 \in Df(a,n)$.

(b)$\underline{\forall n \in \omega(Df(a,n) \subseteq \{E(m,a,n) : m \in \omega\})}$.

Bastará probar que $\forall n \in \omega(Df'(k,a,n) \subseteq \{E(m,a,n) : m \in \omega\})$ para todo $k \in \omega$, lo que haremos por inducción en k . Para $k = 0$:

$$\forall n \in \omega(Df'(0,a,n) = \{Diag_{\in}(a,n,i,j) : i,j < n\} \cup \{Diag_{=}(a,n,i,j) : i,j < n\} \subseteq$$
$$\{E(m,a,n) : m \in \omega\}).$$

Si $\forall n \in \omega(Df'(k,a,n) \subseteq \{E(m,a,n) : m \in \omega\})$, como $\{E(m,a,n) : m \in \omega\}$ es cerrado por complementos, intersecciones y proyecciones, también contendrá a $Df'(k+1,a,n)$ para todo $n \in \omega$. □

Corolario 7.2.4. *$Df(a,n)$ es numerable y la función $m \mapsto E(m,a,n)$ de ω sobre $Df(a,n$ es una enumeración efectiva.*

7.3. Conjuntos definibles por ordinales

Informalmente, un conjunto a se dice **definible por ordinales** si se lo puede definir por medio de una lista finita de ordinales. Esto es, si existe una lista finita de ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y una fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_n, x)$ tal que

$$\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a.$$

Observemos que cada ordinal es definible por ordinales. En efecto, sea $\phi(y_1, x)$ la fórmula atómica $y_1 = x$. Si α es un ordinal, vale que $\phi(\alpha, x) \leftrightarrow \alpha = x$.

Veamos como se puede definir la clase de los conjuntos definibles por ordinales en ZF.

Comencemos por observar que a es definible por ordinales si lo es respecto a una clase V_β, con β suficientemente grande:

Si existe $\beta > max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, rg(a))$ tal que

$$\forall x \in V_\beta(\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a)^{V_\beta}. \tag{7.2}$$

En efecto, si a es definible por ordinales tenemos que

$$\forall x(\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a),$$

para algunos ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y alguna fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_n, x)$. Por el Teorema 7.1.2, existe $\beta > max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, rg(a))$ tal que ϕ es V_β-absoluta. Luego, (7.2) se satisface.

Por otro lado, si se cumple (7.2), entonces a es definible por ordinales en el universo V por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β.

Sea Dor la clase de todos los conjuntos a tales que:

$$\exists \beta > rg(a) \exists n \exists s \in \beta^n \exists r \in Df(V_\beta, n+1) \forall x \in V_\beta(s\hat{\ } < x > \in r \leftrightarrow x = a), \tag{7.3}$$

donde $s\hat{\ } < x >$ denota la función $t\colon n+1 \to V_\beta$ tal que $t(i) = s(i)$, $0 \leq i \leq n-1$, $t(n) = x$.

La definición de la clase Dor tiene sentido en ZF y vamos a ver que coincide con la clase de los conjuntos definibles por ordinales.

Teorema 7.3.1. *Para cada fórmula $\phi(x_o, \ldots, x_{n-1}, x)$ se tiene que*

$$\exists \alpha_0 \ldots \exists \alpha_{n-1}[(\forall x \phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a) \to Dor(a)]. \tag{7.4}$$

Demostración. Fijemos $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ y a y supongamos que

$$\forall x \phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a.$$

Por el Teorema 7.1.2 podemos fijar $\beta > max(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, rg(a))$ de modo tal que ϕ sea V_β-absoluta.

Sea $r = \{< y_0, \ldots, y_{n-1}, x > \in {V_\beta}^{n+1} : \phi(y_0, \ldots, y_{n-1}, x)\}$ y $s = < \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} > \in \beta^n$. Entonces, $\forall x \in V_\beta(s\hat{\ } < x > \in r \leftrightarrow x = a)$.

Pero por ser ϕ V_β-absoluta, resulta

$$r = \{< y_0, \ldots, y_{n-1}, x > \in {V_\beta}^{n+1} : \phi^{V_\beta}(y_0, \ldots, y_{n-1}, x)\}.$$

Luego, por el Lema 7.2.2, $r \in Df(V_\beta, n+1)$. Por lo tanto, a está en Dor. □

El teorema anterior nos dice que todo conjunto a definible por ordinales en el sentido intuitivo, esto es, existe una fórmula ϕ con $n+1$ variables libres tal que $\forall x(\phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a)$, pertenece a Dor.

Vamos a probar la recíproca, para lo que daremos una fórmula ϕ que nos servirá para todos los conjuntos en Dor:

$$\forall a(Dor(a) \to \exists\alpha\forall x(\phi(\alpha, x) \leftrightarrow x = a))$$

Esta es una especie de "forma normal". De hecho, ϕ definirá una "función" de Ord en Dor.

Los lectores que estén familiarizados con la teoría de funciones recursivas, notarán la similitud con la indexacción de las máquinas de Turing (en este caso ω debe ser sustituido por Ord) y la forma normal de Kleene.

Observemos que por (7.4), a cada conjunto a en la clase Dor le corresponde un número finito de ordinales: n, los n ordinales presentes en la n-upla s, β de la definición, junto con el m que caracteriza a la relación $r \in Df(a, n+1)$: $r = E(m, a, n)$ para algún $m \in \omega$.

Luego, podemos indexar los conjuntos de la clase Dor por listas finitas de ordinales, esto es, elementos de $Ord^{<\omega} =$ "$\bigcup\limits_{n\in\omega} Ord^n$".

El primer paso será ver que podemos, a su vez, indexar los elementos de $Ord^{<\omega}$ por Ord.

Si $s, t \in Ord^{<\omega}$, escribiremos $s \lhd t$ sí, y sólo si:

(i) $[max(img(s)) < max(img(t))] \vee$

(ii) $[(max(img(s)) = max(img(t))) \wedge ((dom(s) \subset dom(t)))] \vee$

(iii) $[(max(img(s)) = max(img(t))) \wedge (dom(s) = dom(t)) \wedge$
$(\exists k \in dom(s)((s|_k = t|_k) \wedge s(k) < t(k)))]$

Se verifica fácilmente que dados s, t, u en $Ord^{<\infty}$, $(s \neq t) \to ((s \lhd t) \vee (t \lhd s))$ y $((s \lhd t) \wedge (t \lhd u)) \to (s \lhd u)$.

Sea a un conjunto cuyos elementos están en $Ord^{<\omega}$. Entonces, $(a, \unlhd)$ es un conjunto bien ordenado, donde $s \unlhd t$ significa "$s \lhd t \vee s = t$". Es claro que $\unlhd$ es un orden sobre a. Sea $b \subseteq a, b \neq \emptyset$. Veamos que b tiene primer elemento: $\{max(img(s)) : s \in b\}$ es un conjunto no vacío de ordinales, y por lo tanto tiene primer elemento γ. El conjunto $\{n \in dom(s) : s \in b \wedge max(img(s)) = \gamma\}$ es un subconjunto no vacío de ω y tiene primer elemento p.

Sea $c = \{s \in b : max(img(s)) = \gamma \wedge dom(s) = p\}$. Para cada $i \in p$, definamos $t(i)$ inductivamente como sigue:

(i) $t(0) = min\{s(0) : s \in c\}$, $0 < i \in p$,

(i) $t(i) = min\{s(i) : s \in c \wedge s(j) = t(j), \text{ para } j \in i\}$.

Es claro que $t \in b$ y que $t \unlhd s$ para todo $s \in b$.

Para cada $s \in Ord^{<\omega}$, la sección inicial $Ord^{<\omega}_s = \{t \in Ord^{<\omega} : t \lhd s\}$ es un conjunto. En efecto, si $\beta = max\{img(s)\}$, entonces

$$Ord^{<\omega}_s \subseteq (\beta \oplus 1)^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} (\beta \oplus 1)^n$$

que es un conjunto. Luego, para todo $s \in Ord^{<\omega}$, $Ord^{<\omega}_s$ es un conjunto bien ordenado, y por lo tanto existe un único ordinal α tal que $Ord^{<\omega}_s \sim \alpha$.

La fórmula "α es un ordinal isomorfo a la sección inicial $Ord_s^{<\omega}$ " define una relación funcional $H(s) = \alpha$, "$H\colon Ord^{<\omega} \to Ord$".

Se tiene que $s \lhd t$ si y sólo si $H(s) < H(t)$. En efecto, si $s \lhd t$, entonces $Ord_s^{<\omega}$ es una sección inicial de $Ord_t^{<\omega}$. Luego $H(s)$ es isomorfo a una sección inicial de $H(t)$, y por lo tanto, $H(s) < H(t)$. Por otro lado, si $H(s) < H(t)$, no puede ser que $t \unlhd s$ y por lo tanto debe ser $s \lhd t$.

Veamos ahora que "$H(Ord^{<\omega})$" es decreciente en Ord. Sea $\beta < H(s)$ y sea f el isomorfismo $f\colon Ord_s^{<\omega} \to H(s)$. Por la cláusula (iii) de la Observación 3.2.1 existe $t \in Ord_s^{<\omega}$ tal que $\beta = H(t)$.

Podemos definir la relación funcional inversa de H, J, por la fórmula $J(\alpha) = s$ sí, y sólo si, $H(s) = \alpha$, que está definida sobre la clase "imagen " $H(Ord^{<\omega})$.

Veamos que $H(Ord^{<\omega}) = Ord$. Supongamos que no, es decir, supongamos que exista un ordinal α tal que $\alpha \neq H(t)$ para todo t en $rd^{<\infty}$. Entonces el conjunto $c = \{\beta \in \alpha \oplus 1 : \forall t(Ord^{\infty}(t) \to \beta \neq H(t)\}$ es un conjunto no vacío de ordinales y tiene primer elemento γ. Como $H(Ord^{<\infty}$ es decreciente, debe estar contenida en el conjunto Ord_γ. Entonces J establecería una relación funcional entre un conjunto y $Ord^{<\infty}$, y por el Axioma de Sustitución $Ord^{<\infty}$ sería un conjunto, lo que no es posible pues contiene a todos los ordinales. Por lo tanto J es una "función biyectiva"$J\colon Ord \to Ord^{<\infty}$.

Vamos a definir ahora una "función sobreyectiva" $K\colon Ord^{<\omega} \to Dor$.

Si s en $Ord^{<\omega}$ es de la forma $t\hat{}<\beta, n, m>$, $n, m \in \omega$, $t \in \beta^{<\omega}$, $dom\, t = n$ y para algún (único) $a \in V_\beta(t\hat{} < x > \in E(m, V_\beta, n+1) \leftrightarrow x = a)$, definimos $K(s) = a$. Si s no es de la forma indicada, ponemos $K(s) = \emptyset$.

Es claro que K es una "función" con dominio $Ord^{<\omega}$, y rango contenido en Dor. Que K es sobre resulta del hecho que $E(\_, V_\beta, n+1)\colon \omega \to Df(V_\beta, n+1)$ es sobre y $\emptyset$ está en Dor (pues todos los ordinales están).

Consideremos, ahora, la composición

$$On \xrightarrow{J} On^{<\omega} \xrightarrow{K} Dor$$

$KJ = I$ es de Ord sobre Dor. Si $I(\alpha) = a$, α es un **índice de** a. Todo a en Dor tiene un índice (al menos uno, por ejemplo $\emptyset$ tiene infinitos).

Sea $\psi(s,t)$ la fórmula $Ord(s) \wedge (t = I(s))$. Entonces,

$$\forall y(Dor(y) \to (\exists\alpha(Ord(\alpha) \wedge \forall x(\psi(x,\alpha) \to x = a)). \tag{7.5}$$

Esto prueba que todo conjunto en la clase Dor es definible por ordinales. Entonces teniendo en cuenta el Teorema 7.3.1tenemos el resultado siguiente:

Teorema 7.3.2. *Dor es la clase de los conjuntos definibles ordinales.*

Lema 7.3.3. *(I) Si $w, z \in Dor$, entonces $\{w, z\} \in Dor$.*

(II) Si $w \in Dor$, entonces $\cup w \in Dor$ y $\mathcal{P}(w) \in Dor$.

Demostración. (I) Sean $w = I(\alpha_1)$, $z = I(\alpha_2)$ y sea $a = \{w, z\}$ y sea $\phi(y_1, y_2, x)$ la fórmula:

$$Ord(y_1) \wedge Ord(y_2) \wedge (x = \{I(y_1), I(y_2)\}).$$

Entonces, $\forall x(\phi(\alpha_1, \alpha_2, x) \leftrightarrow x = a)$, lo que prueba que $\{w, z\} \in Dor$.

(II)Se prueba análogamente a (i), tomando como $\phi(x, y)$

$$Ord(y) \wedge (x = \cup I(y))$$

y

$$Ord(y) \wedge (x = \mathcal{P}(I(y)))$$

respectivamente. □

Como no es posible probar que Dor sea transitiva, vamos a considerar la clase de los conjuntos **hereditariamente definibles por ordinales**, que denotaremos $HDor$, formada por los conjuntos de Dor tales que su clausura transitiva está contenida en Dor: $HDor = \{a : Dor(a) \wedge \forall x(x \in Tr(a) \rightarrow Dor(x)\}$.

Lema 7.3.4. *"$Ord \subseteq HDor \subseteq Dor$" y $HDor$ es una clase transitiva.*

Demostración. Sea α un ordinal. Sabemos que $\alpha \in Dor$. Como $Tr(\alpha) = \alpha$ y $\beta \in \alpha$ implica $\beta \in Ord \subseteq Dor$, resulta que $Tr(\alpha) \subseteq Dor$. Luego, $Ord \subseteq HDor$. Es obvio que $HDor \subseteq Dor$. Veamos ahora que $HDor$ es transitiva. Sea $x \in HDor$ e $y \in x$. Como $y \in x \subseteq Tr(x)$ y $Tr(y) \subseteq Tr(x) \subseteq Dor$, resulta que $y \in Dor$ y $Tr(y) \subseteq HDor$, lo que significa que $y \in HDor$. □

Lema 7.3.5. *Para todo conjunto a, si $a \in Dor$ y $a \subseteq HDor$, entonces $a \in HDor$.*

Demostración. Resulta de observar que, para todo a, $Tr(a) = a \cup \bigcup_{x \in a} Tr(x)$. □

Lema 7.3.6. *Para todo α, $V_\alpha \cap HDor \in HDor$.*

Demostración. Como $V_\alpha \cap HDor \subseteq HDor$, por el lema anterior basta ver que $V_\alpha \cap HDor \in Dor$. Sea $\phi(y, x)$ la fórmula

$$Ord(y) \wedge (x = V_y \cap HDor).$$

Luego, $\forall x(\phi(\alpha, x) \leftrightarrow x = V_\alpha \cap HDor)$, y por lo tanto, $V_\alpha \cap HDor \in Dor$. □

Teorema 7.3.7. *$HDor$ satisface todos los axiomas de ZFC$^+$.*

Demostración. El Axioma de Extensionalidad se cumple pues $HDor$ es una clase transitiva (Teorema 6.1.1).

Veamos que se cumple el Axioma de Especificación. Para ello debemos ver que dada una fórmula $\varphi(y, z_1, \ldots, z_k)$ se tiene que para todo $x, y, z_1, \ldots, z_k$ en $HDor$, el conjunto $c = \{y \in x : \varphi(y, z_1, \ldots, z_k)^{HDor}\}$ está en $HDor$. La transitividad de $HDor$ asegura que todos los elementos de c están en $HDor$. Luego por el Lema 7.3.5 para probar que c está en $HDor$ falta ver que c está en Dor. Sea $\phi(w_o, \ldots, w_k, x)$ la fórmula

$$Ord(w_o) \wedge \cdots \wedge Ord(w_k) \wedge (x = \{t \in I(w_0) : \varphi(t, I(w_1), \ldots, I(w_k))^{HDor}\}),$$

y sean $y = I(\alpha_0), z_1 = I(\alpha_1), \ldots, z_k = I(\alpha_k)$. Entonces

$$\phi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, x) \leftrightarrow x = c,$$

y por el Teorema 7.3.1, $c \in HDor$.

Para ver que se cumple el Axioma de la Unión, veremos que

$$\forall a(HDor(a) \rightarrow HDor(\cup a).$$

Sea $b = \cup a$. Como por el Lema 7.3.3 b está en Dor, basta verificar que $b \subseteq HDor$. Sea $x \in b$. Existe $y \in a$ tal que $x \in y$. Como $a \in HDor$, $y \in Tr(a) \subseteq HDor$, y como $HDor$ es transitiva, $x \in HDor$. Por lo tanto, $b \subseteq HDor$.

Para probar el Axioma del Conjunto Potencia basta mostrar que para todo a en $HDor$, $\mathcal{P}(a) \cap HDor \in HDor$. Sea $\alpha > rg(\mathcal{P}(a)$. Entonces teniendo en cuenta el Lema 7.3.6 se tiene que $\mathcal{P}(a) \subset V_{\alpha\oplus 1} \cap HDor \in HDor$, y por el Axioma de Especificación relativo a $HDor$,

$$\mathcal{P}(a) \cap HDor = \{x \in V_{\alpha\oplus 1} \cap HDor : x \subseteq a\} \in HDor.$$

Para probar el Axioma (Esquema) de Sustitución, sea $\varphi(x, y)$ una fórmula y a un conjunto en $HDor$ tal que se satisfaga

$$\forall x((x \in a) \rightarrow \exists! y(HDor(y) \wedge \varphi(x, y)^{HDor}.$$

Por el Axioma de Sustitución válido en $\mathcal{V}$, existe el conjunto

$$b = \{y : (HDor(y) \wedge (\exists x \in a \varphi(x, y)^{HDor})\}.$$

Debemos probar que b está en $HDor$. Sea $\alpha > \sup\{rg(y)\}_{y \in b}$. Entonces $b \subset V_\alpha \cap HDor \in HDor$ y por el Axioma de Especificación relativo a $HDor$,

$$b = \{y \in V_\alpha \cap HDor : y \in b\} \in HDor.$$

El Axioma del Infinito se satisface porque $\omega \in Ord \subseteq HDor$.

El Axioma de Regularidad se satisface porque $HDor \subseteq \mathcal{V}$.

Veamos que también se satisface el Axioma de Elección (relativo a $HDor$). Como $HDor$ es transitiva y satisface los axiomas de especificación, del par y de la unión, si a y r son conjuntos en $HDor$ y r es un buen orden sobre a, entonces

(r es un buen orden sobre $a)^{HDor}$ es verdadero. Luego, basta probar que para todo $a \in HDor$ existe $r \in HDor$ que es un buen orden sobre a.

Sea $a = I(\alpha) \in HDor$. Como $a \subset Dor$, podemos bien ordenar los elementos de a por medio de los menores de sus índices:

$$r = \{\langle s, t\rangle \in a \times a : \exists \xi (s = I(\xi) \wedge \forall \eta \leq \xi (t \neq I(\eta))\}.$$

Sea

$$r(y) = \{\langle s, t\rangle \in I(y) \times I(y) : \exists \xi (s = I(\xi) \wedge \forall \eta \leq \xi (t \neq I(\eta))\}$$

y sea $\varphi(y, x)$ la fórmula $Ord(y) \wedge x = r(y)$. Si $a = I(\alpha)$, entonces

$$\varphi(\alpha, x) \leftrightarrow x = r.$$

Luego por el Teorema 7.3.1, $r \in Dor$ y como $r \subseteq a \times a \subset HDor$, por el Lema 7.3.5 resulta que r está en $HDor$. $\square$

Corolario 7.3.8. *Si ZF$^+$ tiene modelo, también lo tiene ZFC$^+$.*

7.4. Ejercicios

El siguiente ejercicio aclarará algunos de los argumentos usados en la demostración del Teorema 7.3.7.

Ejercicio 7.4.1. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface el Axioma de Especificación y la siguiente condición:*

$$\forall x(\mathcal{C}(x) \rightarrow \exists\ y((\mathcal{C}(y) \wedge x \subseteq y))). \tag{7.6}$$

Probar que $\mathcal{C}$ satisface los Axiomas de ZF menos el Axioma del Infinito.

Ejercicio 7.4.2. *Dar un ejemplo de una clase transitiva $\mathcal{C}$ que satisfaga el Axioma de Especificación y (7.6) pero no satisfaga el Axioma del Infinito.*