Capítulo 1

Teoría axiomática

1.1. La Paradoja de Russell

El matemático alemán Georg Cantor desarrolló la teoría de conjuntos en base a la siguiente definición, dada por él en 1895:

> *Se entiende por conjunto la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra percepción o de nuestro pensamiento.*

Así, en principio, se podría considerar el conjunto de todos los caballos blancos, o el conjunto de todos los triángulos equiláteros.

Pero esta noción tan amplia de conjunto lleva a paradojas, como lo demostró el lógico inglés Bertrand Russell a principios del siglo XX. En efecto, la definición cantoriana permite concebir conjuntos que sean elementos de sí mismos: por ejemplo, el conjunto de todas las ideas abstractas es una idea abstracta. Siguiendo a Russell, llamaremos *ordinarios* a los conjuntos que no son elementos de si mismos, y *extraordinarios* a los demás. Esto es, un conjunto X es ordinario si y sólo si $X \notin X$ y extraordinario si y sólo si $X \in X$. De acuerdo con la definición de Cantor podemos considerar el conjunto A de todos los conjuntos ordinarios. Como A es un conjunto, deberá ser ordinario o extraordinario. Si A fuese ordinario, entonces debería ser $A \in A$, lo que significa que A sería extraordinario. Luego no puede ser A ordinario. Pero tampoco puede ser extraordinario, pues si A fuese extraordinario, entonces $A \notin A$, y por lo tanto sería ordinario. En otras palabras, hemos derivado la contradicción $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$.

La noción cantoriana de conjunto está ligada a la noción de *propiedad*: Dada una propiedad P, podemos formar el conjunto $\{x : P(x)\}$ de los objetos que satisfacen P (y, recíprocamente, dado un conjunto C, le podemos asociar la propiedad "pertenecer a C").

En 1908, en su trabajo sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos, el matemático alemán Ernest Zermelo señala que la paradoja de Russell muestra que no es admisible asignarle a cualquier propiedad lógicamente bien definida un conjunto como su extensión. Por lo tanto la definición original de Cantor debe restringirse, y como esta definición no ha podido ser reemplazada por otra que sea igualmente simple y que no de lugar a paradojas, Zermelo concluye que:

> *Bajo estas circunstancias no nos queda en este punto más que proceder en la dirección opuesta y, partiendo del desarrollo histórico de la teoría de conjuntos, buscar los principios requeridos para fundamentar esta disciplina matemática. Para resolver este problema debemos, por un lado, restringir estos principios suficientemente para excluir contradicciones y, por el otro, elegirlos suficientemente amplios para retener todo lo de valor que tenga la teoría.*

En otras palabras, para eliminar la paradoja, Zermelo propone considerar como conjuntos sólo aquellos objetos que satisfagan las condiciones impuestas por ciertos axiomas. El propósito de este curso es desarrollar esta idea.

Intuitivamente, podemos pensar que los conjuntos se van formando en etapas: para poder formar un conjunto, todos sus posibles elementos deben ya estar definidos. Habría dos tipos de objetos: individuos (llamados *urelemente*) y conjuntos. En la etapa inicial sólo habría individuos. Los conjuntos de la primera etapa estarían formados por individuos. Los de la segunda etapa, por individuos y conjuntos de la primera etapa. En general, los conjuntos de una etapa estarían formados por individuos y conjuntos definidos en etapas anteriores.

Vamos a considerar una teoría *pura* de conjuntos, esto es, *sin individuos*. Entonces en la primera etapa tendremos el conjunto vacío $\emptyset$, en la segunda $\emptyset$ y el conjunto que tiene por único elemento al vacío $\{\emptyset\}$, en la tercera $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y así siguiendo. De esta manera podemos concebir una colección de objetos, que llamaremos el **universo de la teoría de conjuntos** y denotaremos por $\mathcal{U}$. En $\mathcal{U}$ tenemos una relación binaria, que llamaremos **relación de pertenencia** y denotaremos por $\in$. Si a, b son objetos de $\mathcal{U}$, $a \in b$ se lee como "a pertenece a b" o "a es un elemento de b". La relación $a \in b$ puede darse sólo si a aparece en una etapa anterior a la aparición de b.

La teoría axiomática que desarrollaremos, debida esencialmente a Zermelo, tiene como propósito formalizar estas ideas intuitivas sobre el universo $\mathcal{U}$ y la relación $\in$.

Para conseguir este propósito, debemos fijar algunas propiedades básicas como axiomas. Pero aquí se plantea otra cuestión ¿Qué tipo de propiedades son admisibles? Obviamente deben ser propiedades que se refieran a conjuntos. La siguiente paradoja, debida a Berry y divulgada por Russell, si bien se refiere a números y no a conjuntos, muestra que hay que ser cuidadosos:

Sea P la propiedad "ser definible por medio de una oración en idioma castellano de no más de treinta palabras". La propiedad P tiene sentido para números naturales: si n es un número natural, $P(n)$ será verdadera si y sólo si n puede definirse en castellano con no más de treinta palabras. Como hay sólo un número finito de oraciones castellanas que se pueden formar con no más de treinta palabras, debe haber números naturales que no satisfacen P. Sea m el primer número natural que no satisface P. Esto es, "m es el primer número natural que no puede definirse en castellano por medio de una oración con no más de treinta palabras". Pero esta oración define a m, está en castellano y tiene veintitrés palabras. Por lo tanto m satisface P, contrariando la definición de m.

Esta paradoja es de naturaleza ditinta a la de Russell, pues si bien P tiene sentido para números, no es una propiedad de los números sino del lenguaje que utilizamos para expresarla.[1] Para estar seguros de que hay un primer número que satisface una cierta propiedad, ésta debe referirse sólo a condiciones derivadas de las operaciones aritméticas, independientemente del lenguaje que usemos para expresarla. Análogamente, al hablar de propiedades de conjuntos, queremos decir propiedades que se puedan expresar en términos de las relaciones de igualdad y pertenencia. Comenzaremos entonces por definir un lenguaje adecuado para expresar en forma precisa tales propiedades.

1.2. El lenguaje de la teoría

Un lenguaje está formado por listas (finitas) de símbolos. Luego para definir un lenguaje debemos dar un número finito de símbolos básicos, que constituyen el **alfabeto** y las reglas que nos indiquen que listas de símbolos son admisibles.

El lenguaje que vamos a definir para formalizar la teoría de conjuntos es un caso particular de los lenguajes de primer orden, estudiados en lógica matemática.

El alfabeto que usaremos está formado por los símbolos:

$$v,\ |,\ \wedge,\ \neg,\ (,\ ),\ \exists,\ =,\ \in .$$

$\wedge$ y $\neg$ son los conectivos de **conjunción** y de **negación** y $\exists$ es el **cuntificador existencial**.

Llamaremos **variables individuales** o simplemente **variables** a las listas formadas por el símbolo v seguido de un número finito de barras $|$. Para simplificar la escritura, usaremos v_n como abreviatura de v seguido de n barras. Así $v_0 = v$, $v_1 = v|$, $v_2 = v||$, etc.

Llamaremos **fórmula atómica** a las listas de símbolos de la forma: $(x \in y)$ y $(x = y)$, donde x e y denotan variables.

Podemos dar ahora las reglas de formación de los elementos principales de nuestro lenguaje, que se llaman **fórmulas**.

Una lista de símbolos es una fórmula si se la puede generar mediante un número finito de pasos respetando las siguiente reglas:

F1) Las fórmulas atómicas son fórmulas.

F2) Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ también lo es.

F3) Si φ y ψ son fórmulas, también lo es $(\varphi \wedge \psi)$,

F4) Si φ es una fórmula y x una variable, entonces $\exists x\varphi$ es una fórmula.

[1] Para una interpretación de la Paradoja de Berry en lenguajes formales y sus aplicaciones a la lógica matemática, ver [4].

¿Qué significa que una lista de símbolos se obtenga aplicando un número finito de veces las reglas F1) – F4)? La respuesta precisa es la siguiente:

DEFINICIÓN: Llamaremos **cadena de formación de fórmulas** a una lista finita X_1, X_2, ... X_n, donde para cada i, $1 \leq i \leq n$, X_i es una lista finita de símbolos del alfabeto que satisface una (y sólo una) de las siguientes condiciones:

CFF1) X_i es una fórmula atómica,

CFF2) o bien existe $1 \leq j < i$ tal que X_i es $\neg X_j$,

CFF3) o bien existen $1 \leq j, k < i$ tales que X_i es $(X_j \wedge X_k)$,

CFF4) o bien existe $1 \leq j < i$ y una variable x tal que X_i es $\exists x X_j$.

Una lista X de símbolos del alfabeto es una fórmula si y sólo si existe una cadena de formación de fórmulas $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X = X_n$.

Debemos notar que los cuantificadores se aplican únicamente a las variables y no a otro tipo de expresiones. Esta propiedad caracteriza a los *lenguajes de primer orden.*

Llamaremos **grado de complejidad de una fórmula** φ, y lo denotaremos por *comp* (φ), al número de conectivos y cuantificadores que figuran en φ, contados tantas veces como aparezcan.

Observemos que:

1. *comp* $(\varphi) = 0$ si y sólo si φ es una fórmula atómica,
2. *comp* $(\neg\varphi) =$ *comp* $(\varphi) + 1$,
3. *comp* $(\varphi \wedge \psi) =$ *comp* $(\varphi) +$ *comp* $(\psi) + 1$,
4. *comp* $(\exists x\varphi) =$ *comp* $(\varphi) + 1$.

Como una aplicación de lo anterior, definiremos inductivamente la noción de **subfórmula** de una fórmula.

Sea φ una fórmula. Si *comp* $(\varphi) = 0$ (esto es, si φ es una fórmula atómica), entonces φ es la única subfórmula de φ. Supongamos ahora que *comp* $(\varphi) = n > 0$ y que hemos definido subfórmulas para toda fórmula de complejidad menor que n. Si $\varphi = \neg\psi$ o si $\varphi = \exists x\psi$, entonces *comp* $(\psi) = n-1$, y las subfórmulas de φ son φ, ψ y las subfórmulas de ψ. Si $\varphi = (\psi \wedge \zeta)$, entonces debe ser *comp* $(\psi) < n$ y *comp* $(\zeta) < n$. Las subfórmulas de φ son φ, ψ, ζ y las subfórmulas de ψ y de ζ. Esto completa la definición de subfórmula para cualquier fórmula φ.

En lo que sigue no expresaremos todas nuestras fórmulas usando sólo símbolos del alfabeto, sino que introduciremos nuevos símbolos como abreviaturas de fórmulas enteras e incluso expresaremos algunas ideas en lenguaje coloquial.

Por de pronto, introducimos los conectivos de **disyunción** $\vee$, **implicación** $\rightarrow$, **si y sólo si** $\leftrightarrow$ y el **cuantificador universal** $\forall$ del modo siguiente:

Para fórmulas φ, ψ y variable x se tiene que:

1. $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\, \varphi \wedge\ \neg\, \psi)$,
2. $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\, \varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\, \psi)$,
3. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$,
4. $\forall x \varphi \equiv \neg\, \exists\, x\, \neg\varphi$.

Las expresiones de la izquierda deben entenderse como una abreviatura de las expresiones de la derecha.

Además, en algunas ocasiones, para mayor claridad en fórmulas anidadas, usaremos llaves $\{, \}$ y corchetes $[,]$ además de paréntesis como símbolos de puntuación, o simplemente no usaremos ningún símbolo si la puntuación queda sobreentendida. Usaremos las letras x, y, z (posiblemente con subíndices) para designar variables. Además seguiremos el uso habitual en matemática y abreviaremos las negaciones $\neg(x = y)$ y $\neg(x \in y)$ por $x \neq y$ y $x \notin y$, respectivamente.

Por ejemplo

$$(\exists\, y\ (y \in x)) \rightarrow (\forall x\ ((x \notin y))) \tag{1.1}$$

abrevia la fórmula

$$(\neg\ (\neg\ (\exists\, y\ (y \in x))) \wedge (\neg\ ((\neg\ \exists\ \neg x(\neg\ (x \in y))))))$$

Para poder definir los enunciados de nuestro lenguaje, que nos permitirán expresar las propiedades de los conjuntos, necesitamos introducir los conceptos de apariciones libres y ligadas de una variable en una fórmula.

Una variable x aparece **ligada** en una fórmula φ si está afectada por un cuantificador $\exists x$ o $\forall x$. En caso contrario, se dice que aparece **libre** en φ.

Por ejemplo la primera y segunda aparición de y en (1.1) es ligada y la tercera, libre. La primera aparición de x es libre, mientras que la segunda y tercera son ligadas.

Un **enunciado** es una fórmula sin variables libres.

En todo este curso supondremos que *las variables representan conjuntos, esto es, individuos del universo $\mathcal{U}$*. Luego $\exists\, x$ se interpreta como "existe un conjunto x" y $\forall\, x$ como "para todo conjunto x". los enunciados expresan propiedades del universo que dependen sólo de la relación de pertenencia y de las relaciones lógicas (incluyendo entre éstas la igualdad). Estos enunciados serán verdaderos si y sólo si expresan una propiedad del universo de acuerdo a la mencionada interpretación. En realidad como en toda teoría axiomática vamos a considerar verdaderos aquellos enunciados que puedan deducirse de los enunciados que tomamos como axiomas aplicando las reglas lógicas habituales para el uso de los conectivos y cuantificadores[2].

Escribiremos $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que las variables $x_1, \ldots, x_n$ figuran libres en la fórmula φ. A diferencia de los enunciados, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ no expresa una proposición verdadera o falsa. Será verdadera o falsa según los valores

[2]El lector interesado podrá encontrar los detalles sobre las interpretaciones de los lenguajes de primer orden y la noción de verdad para los mismos en cualquier texto de lógica matemática.

que tomen las variables (esto es análogo a lo que ocurre con las expresiones algebraicas del tipo $5x + 3 = 2y$).

Las apariciones libres de una variable en una fórmula φ pueden ser reemplazadas por otra variable que no figure en φ sin cambiar el significado de la fórmula. Si y es una variable que no figura en φ, escribiremos $\varphi(x|y)$ para indicar la fórmula que se obtiene reemplazando todas las apariciones libres de x por la variable y, y dejando el resto inalterada.

Usaremos también la siguiente notación, común en los textos de matemática, para indicar que hay un único objeto que hace verdadera a una fórmula: si $\varphi(x)$ es una fórmula con x libre, $\exists! x\varphi(x)$ abrevia la fórmula

$$(\exists x\varphi(x)) \ \wedge \ (\forall x\forall y((\varphi(x) \wedge \varphi(x|y)) \ \rightarrow \ (y = x))).$$

Dada una fórmula con una única variable libre, $\varphi(x)$, llamaremos **clase** a la colección de objetos $\mathcal{C}_\varphi$ del universo $\mathcal{U}$ formada por los x tales que $\varphi(x)$ es verdadera, y escribiremos $\mathcal{C}_\varphi = \{x : \varphi(x)\}$. Diremos informalmente que x *está* en la clase $\mathcal{C}_\varphi$ si $\varphi(x)$ es verdadero.

La idea de clase se corresponde con la idea de conjunto en el sentido de la definición de Cantor: son los objetos que satisfacen una cierta propiedad. Pero en nuestra teoría, los conjuntos son los *individuos* del universo, y *no* las colecciones de individuos, que son las clases[3].

Tanto las clases, como el universo $\mathcal{U}$, no constituyen objetos de la teoría. Son nociones intuitivas que ayudan a entender los conceptos tratados. En realidad, todo el desarrollo de la teoría se basa en la manipulación formal de listas de símbolos del alfabeto.

1.3. Primeros axiomas

Los axiomas de esta sección se los llama con frecuencia *axiomas del álgebra de conjuntos*, ya que con ellos es posible definir las operaciones elementales de unión, intersección, producto cartesiano, etc.

Es razonable pensar que si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces deben ser iguales. El siguiente axioma concuerda con esta idea de igualdad. Formalmente, relaciona el símbolo de igualdad $=$ con el de pertenencia $\in$.

Axioma de Extensionalidad: $\forall x \ \forall y \ ((\forall t \ (t \in x \ \leftrightarrow \ t \in y)) \ \rightarrow \ (x = y))$.

La definición que sigue es un ejemplo de introducción de un símbolo nuevo en la teoría.

DEFINICIÓN: Sean a y b conjuntos. Diremos que a es un **subconjunto** de b o que a está **incluido** o **contenido** en b y lo escribiremos $a \subseteq b$, si y sólo si $\forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$. Escribiremos $a \subset b$ para indicar que $a \subseteq b$ y $a \neq b$.

[3]Existen tratamientos de la teoría de conjuntos donde las clases intervienen como objetos que conforman la teoría. Este tratamiento es seguido en el libro de Suppes [16] y en el Apéndice de [7]

Utilizando el nuevo símbolo $\subseteq$, el Axioma de Extensionalidad puede expresarse así:

$$\forall x \forall y(((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)) \rightarrow (x = y)). \tag{1.2}$$

Axioma del Vacío: $\exists y \; \forall x \; \neg(x \in y)$.

Si a es vacío y b es un conjunto, entonces $a \subseteq b$. En efecto, es cierto que $\forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$ debido a que $(x \in a)$ es falso cualquiera sea x. De acá resulta que el conjunto vacío es único. En efecto, si a y b son ambos vacíos, tendremos que $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$, y por (1.2), resulta que $a = b$. El conjunto vacío será simbolizado por $\emptyset$.

Axioma (esquema) de Especificación: Si φ es una fórmula con la variable t libre, entonces el enunciado siguiente es un axioma:

$$\forall \; x \; \exists \; y \; ((\forall t \; (t \in x \;\; \wedge \;\; \varphi(t)) \;\; \leftrightarrow \;\; (t \in y)).$$

Los axiomas deben ser enunciados del lenguaje de la teoría de conjuntos. El axioma anterior no es un axioma, sino un esquema para formar axiomas. Para cada fórmula φ tenemos un axioma. Como hay infinitas fórmulas, el esquema nos da infinitos axiomas.

Observemos que del Axioma de Extensionalidad se deduce fácilmente que para toda fórmula $\varphi(t)$ y todo conjunto x, el conjunto y cuya existencia garantiza el Esquema de Especificación es único. Será designado con la siguiente notación:

$$\{t \in x : \varphi(t)\}$$

Intuitivamente, el Esquema de Especificación significa que dada una propiedad P, podemos formar un conjunto *con los elementos de un conjunto* a que satisfacen la propiedad. Esta restricción de la propiedad P a los elementos de un conjunto a previamente dado es coherente con nuestra descripción intuitiva del universo $\mathcal{U}$: todos los elementos de a deben haberse definido en etapas anteriores, por lo tanto están disponibles para ser elementos de un conjunto. Esta restricción es la idea fundamental de Zermelo para evitar paradojas del tipo de la de Russell. En efecto, para poder demostrar que la clase $\{x : x \notin x\}$ es un conjunto aplicando el Esquema de Especificación, habría que demostrar primero el enunciado $\exists y \forall x(x \notin x) \rightarrow x \in y)$, esto es, que hay un conjunto que contiene a todos los conjuntos ordinarios. Volveremos sobre este punto en el Capítulo 5. Ahora nos contentaremos con ver que el universo $\mathcal{U}$ no puede ser un conjunto, esto es, que no puede existir un conjunto u tal que $\forall x(x \in u)$. Más generalmente, veamos que:

$$\forall x \; \exists y \; (y \notin x).$$

En efecto,sea a un conjunto y sea $b = \{x \in a : \;\; x \notin x\}$. Si $b \in a$, entonces $b \notin b \wedge b \in a \;\; \leftrightarrow \;\; b \in b \wedge b \in a$, que una contradicción. Luego $b \notin a$.

Axioma del Par: $\forall x \; \forall y \; \exists z \; ((\forall t \; (t = x \vee t = y)) \;\; \rightarrow \;\; (t \in z))$.

Usando este axioma y el de Especificación podemos obtener, dados dos elementos x e y, un conjunto con exactamente estos dos elementos. Además, éste conjunto es único por el axioma Extesionalidad, por lo tanto podemos establecer la siguiente definición.

DEFINICIÓN: Llamaremos **par (desordenado)** al conjunto

$$\{x, y\} = \{y \in z : \ t = x \vee t = y\}$$

donde z es uno de los conjuntos cuya existencia está garantizada por el Axioma del Par. Cuando $x = y$ obtenemos el **conjunto unitario** $\{x\} = \{t \in z : t = x\}$.

Observemos que el Axioma del Par está de acuerdo con nuestra idea intuitiva del universo: Si hemos definido los conjuntos a y b, en una etapa posterior podrán ser elementos de un conjunto. Notemos también que $\forall x(x \in \{x\})$. Esto significa que todo conjunto es elemento de otro conjunto, y concuerda con la idea de que no hay una etapa final.

Antes de proseguir con el listado de axiomas, diremos algo respecto de definiciones y expresiones como la del par.

Si $\varphi(x, y)$ es una fórmula con dos variables libres x e y y $\mathcal{C}$ una clase, y supongamos que es verdadero $\forall x \ (\mathcal{C}(x) \ \rightarrow \ \exists! y \varphi(x, y))$ (ver la notación introducida en la página 12), entonces diremos que $\varphi(x, y)$ es **funcional** en $\mathcal{C}$. En estas circunstancias tiene sentido introducir el símbolo F y la notación $y = F(x)$, para simbolizar que dado x en $\mathcal{C}$, entonces y es el único conjunto para el cual $\varphi(x, y)$ es verdadera. A F la llamaremos **operación** o **relación funcional** sobre $\mathcal{C}$. Es fácil generalizar esta idea para obtener fórmulas funcionales de múltiples variables. La definición de par es justamente una operación en $\mathcal{U}$ que a dos conjuntos cualesquiera x e y asigna el conjunto z tal que $z = \{x, y\}$. Otros ejemplos de operaciones los veremos a continuación con la presentación de los axiomas que siguen.

Axioma de Unión: $\forall x \ \exists z \ \forall t \ ((\exists y \ (y \in x \wedge t \in y)) \ \rightarrow \ (t \in z))$

DEFINICIÓN: Sea a un conjunto, llamaremos **unión** de a al conjunto

$$\cup a = \{x \in z : \ \exists y \ (y \in a \ \wedge x \in y)\},$$

donde z es uno de los conjuntos cuya existencia está garantizada por el Axioma de la Unión.

Una notación que puede resultar más familiar para la unión es $\cup_{c \in a} c$. Esta notación está ligada a la noción de familia de conjuntos, que veremos un poco más adelante.

Si c es un par, digamos $c = \{a, b\}$, entonces siguiendo la costumbre escribiremos $a \cup b$ en vez de $\cup\{a, b\}$.

Según nuestra idea intuitiva, los elementos de un conjunto a son conjuntos obtenidos en etapas anteriores. A su vez, los elementos de estos conjuntos deben haber sido obtenidos en etapas previas a su definición. Por consiguiente todos ellos están disponibles para formar la unión, por lo que el Axioma de la Unión es compatible con nuestra intuición del universo $\mathcal{U}$.

Observemos que de los Axiomas del Par y de la Unión resulta fácilmente que dado un número finito de conjuntos $a_1, \ldots a_n$, podemos formar un conjunto que los tiene como elementos. El (único) conjunto formado por estos elementos será denotado por $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Otra operación importante en el álgebra de conjuntos es la intersección. Pero para definirla no necesitamos un nuevo axioma.
DEFINICIÓN: Sea a un conjunto no vacío, llamaremos **intersección** de a al conjunto

$$\cap a = \{x \in b : \ \forall y \ (y \in a \ \rightarrow x \in y)\}$$

donde b es cualquier elemento de a.

El Esquema de Especificación asegura que para todo $a \neq \emptyset$, $\cap a$ es un conjunto, y el Axioma de Extensionalidad asegura que $\cap \, a$ no depende del conjunto $b \in a$ elegido para definirla. En efecto, si b y c son elementos de a, entonces los conjuntos $\{x \in b : \ \forall y \ (y \in a \ \rightarrow x \in y)\}$ y $\{x \in c : \ \forall y \ (y \in a \ \rightarrow x \in y)\}$ tienen los mismos elementos.

Como en el caso de la unión, escribiremos $a \cap b$ en vez de $\cap\{a, b\}$.

El motivo por el que la definición de intersección se aplica sólo a conjuntos no vacíos es el siguiente: Dado un conjunto x, para probar que $x \notin \cap \, \emptyset$ deberíamos probar que existe un $y \in \emptyset$ tal que $x \notin y$. Como esto no es posible, debemos tener que $\cap \, \emptyset = \mathcal{U}$, que ya sabemos que no es un conjunto.

DEFINICIÓN: La **diferencia** de los conjuntos a y b es el conjunto

$$a \setminus b = \{x \in a : \ x \notin b\}.$$

Siguiendo con nuestra idea intuitiva de formación de los conjuntos, tenemos que si un conjunto a ha sido obtenido en una cierta etapa, entonces todos sus elementos deben haber sido obtenidos en etapas anteriores. Luego en la misma etapa en la que está disponible a están también disponibles todos los subconjuntos de a, lo que permite tomarlos como elementos de un nuevo conjunto en una etapa posterior. Resulta entonces natural el axioma siguiente:

Axioma del Conjunto Potencia: $\forall x \ \exists y \ (\forall t \ (t \subseteq x \ \rightarrow \ t \in y))$

DEFINICIÓN: Sea a un conjunto e y un conjunto que contenga a todos los subconjuntos de a, cuya existencia asegura el axioma anterior; definimos las **partes** de a como el conjunto $\mathcal{P}(a) = \{x \in y : \ x \subseteq a\}$.

Ejemplo: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Es un resultado elemental de la teoría intuitiva de conjuntos que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos. Partiendo del ejemplo anterior, vemos así que tomando partes de partes podemos formar conjuntos finitos tan grandes como queramos.

Con los axiomas vistos hasta ahora no sólo se puede desarrollar el álgebra elemental de conjuntos, sino que también permiten definir dentro de la teoría las nociones de producto cartesiano, de relación y de función.

Para definir el producto cartesiano necesitamos la noción de par ordenado. La propiedad fundamental de los pares ordenados es que permite distinguir entre el primero y el segundo elemento del par, esto es, $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. La única justificación de la siguiente definición de par ordenado, debida a Kuratowski, es la satisfacción de esta propiedad.

DEFINICIÓN: Dados dos conjuntos a y b, se llama **par ordenado** con primer elemento a y segundo elemento b al conjunto $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

No es difícil probar que la definición anterior implica que $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$ (ver Ejercicio 1.4.9).

La definición de par ordenado es suficientemente simple como para poder mostrar explícitamente la fórmula $\varphi(x, y, z)$ del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos que expresa que $z = \langle x, y\rangle$, suponiendo que $x = v_0$, $y = v_1$ y $z = v_2$:

$$\forall v_3[(v_3 \in v_2) \leftrightarrow$$
$$((\forall v_5((v_5 \in v_3) \leftrightarrow (v_5 = v_0))) \vee (\forall v_6((v_6 \in v_3) \leftrightarrow ((v_6 = v_0) \vee (v_6 = v_1)))))].$$

DEFINICIÓN: Dados dos conjuntos a y b llamaremos **producto cartesiano** de a por b al conjunto $a \times b = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) : \ (x \in a) \wedge (y \in b)\}$.

La noción de producto cartesiano permite definir las nociones de relación binaria y de función.

DEFINICIONES: Llamaremos **relación** entre los conjuntos a y b a cualquier subconjunto del producto cartesiano $a \times b$. Dada la relación $r \subseteq a \times b$, se llama **dominio** de r al conjunto

$$dom(r) = \{x \in a : \exists y((y \in b) \wedge (\langle x, y\rangle \in r))\}$$

y se lama **imagen** de r al conjunto

$$img(r) = \{y \in b : \exists x(x \in a \wedge \langle x, y\rangle \in r\}.$$

Una relación $r \subseteq a \times a$ se dirá una **relación binaria sobre** a.

Como un primer ejemplo de relación binaria sobre un conjunto a tenemos la **relación de igualdad**:

$$\Delta(a) = \{(x, y) \in a \times a : x = y\}. \tag{1.3}$$

Se tiene que $dom(\Delta(a)) = img(\Delta(a)) = a$.

Observaciòn 1.3.1. Al definir una relación como un subconjunto de $a \times b$, parecería que estamos restringiendo la idea intuitiva de relación binaria a aquellas relaciones entre elementos de dos conjuntos previamente dados. Parecería más natural definir una relación binaria simplemente como un conjunto de pares ordenados, sin referencia a los conjuntos a y b. Esto es, llamar relaciones binarias a los conjuntos r que satisfacen la siguiente propiedad:

$$z \in r \leftrightarrow \exists x \exists y(z = \langle x, y\rangle).$$

Pero en realidad esta definición no sería más general que la dada. En efecto, como por hipótesis r es un conjunto, podemos definir $\cup r$, y si $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in r$, entonces $\{x, y\} \in \cup r$. Luego $x \in \cup \cup r$ e $y \in \cup \cup r$, lo que significa que $r \subseteq \cup\cup r \times \cup\cup r$. En particular tenemos que $dom(r) \subseteq \cup\cup r$ e $img(r) \subseteq \cup\cup r$.

La observación anterior sugiere extender la noción de dominio e imagen para conjuntos arbitrarios del modo siguiente:

Dado un conjunto a, se llama **dominio** de a al conjunto

$$dom(a) = \{x \in \cup \cup a : \exists y \, \langle x, y\rangle \in a\} \tag{1.4}$$

y se llama **imagen** de a al conjunto

$$img(a) = \{y \in \cup \cup a : \exists x \, \langle x, y\rangle \in a\}. \tag{1.5}$$

Notación: En lo sucesivo, para simplificar la escritura, utilizaremos las abreviaturas:

$$\forall x \in y \; \varphi(x) \;\text{ y }\; \exists x \in y \; \varphi(x)$$

en lugar de

$$\forall x((x \in y) \to \varphi(x) \text{ y de } \exists x((x \in y) \land \varphi(x),$$

respectivamente.

Definiremos dos tipos de relaciones que serán utilizadas con frecuencia.

Definiciones: Una relación binaria r definida en un conjunto a se llama una **relación de orden**, o, implemente, un **orden** sobre a si satisface las siguientes propiedades:

1. *Reflexiva:* $\forall x \in a \; (\langle x, x\rangle \in r)$,
2. *Antisimétrica:* $\forall x \forall y(((\langle x, y\rangle \in r) \land (\langle y, x\rangle \in r) \to x = y))$,
3. *Transitiva:* $\forall x \forall y \forall z(((\langle x, y\rangle \in r) \land (\langle y, z\rangle \in r)) \to (\langle x, z\rangle \in r))$.

Un orden r definido en a se dice **total** si cumple que

$$\forall \; x \in a \; \forall \; y \in a \; (\langle x, y\rangle \in r) \lor (\langle y, x\rangle \in r)).$$

Un **conjunto ordenado** es un par ordenado $\langle a, r\rangle$ tal que a es un conjunto y r es un orden sobre a. Cuando r es total, el par $\langle a, r\rangle$ es un **conjunto totalmente ordenado**.

Obsevemos que la relación de igualdad es una relación de orden, que no es orden total para conjuntos con más de un elemento.

Definición: Una **relación de orden estricto** o un **orden estricto** sobre un conjunto a es una relación $r \subseteq a \times a$ que es transitiva y anti-reflexiva: $\forall \; x \in a \; (\langle x, x\rangle \notin r)$.

El siguiente lema, cuya fácil demostración dejamos a cargo del lector, establece las relaciones entre órdenes y órdenes estrictos.

Lema 1.3.2. *Sea a un conjunto y $r \subseteq a \times a$. Se tiene que:*

I) *r es un orden estricto si y sólo si $r \cap \Delta(a) = \emptyset$ y $r \cup \Delta(a)$ es un orden,*

II) *r es un orden si y sólo si $r \setminus \Delta(a)$ es un orden estricto.* □

NOTACIÓN: Si r es una relación de orden sobre a, escribiremos $x \leq_r y$, o alternativamente $y \geq_r x$, para indicar que $\langle x, y \rangle \in r$. Cuando $\langle x, y \rangle \in r$ y $x \neq y$, escribiremos $x <_r y$, o alternativamente $y >_r x$. Cuando no haya lugar a confusión, omitiremos el subíndice r. Más aún, siguiendo la costumbre en matemática a veces designaremos las relaciones de orden directamente por $\leq$ y diremos simplemente *conjunto ordenado* a para indicar al par $\langle a, \leq \rangle$.

A continuación recordaremos algunas nociones básicas sobre conjuntos ordenados que utilizaremos a lo largo del curso.

Sea $(a, \leq)$ un conjunto ordenado y $b \subseteq a$.

Diremos que $z \in a$ es una **cota superior** de b si $x \leq z$ para todo $x \in b$.

Una cota superior z de b se dice **estricta** si $z \notin b$, esto es, $x < z$ para todo $z \in b$.

Observemos que b puede tener a lo sumo una cota superior no estricta. Si esta cota superior no estricta existe, se denomina el **elemento máximo** o también el **último elemento** de b.

El subconjunto b se dice **acotado superiormente** si existe una cota superior de b en a.

Un elemento $y \in b$ se dice **maximal** en b si no existen en b elementos estrictamente mayores que y. Esto es, para todo $x \in a$, si $y \leq x$, entonces $y = x$ ó $x \notin b$.

Es claro que si b tiene elemento máximo u, entonces u es maximal en b (y el único elemento maximal de b). Pero en general b puede tener varios elementos maximales, sin tener elemento máximo. Un ejemplo extremo es la relación de igualdad considerada como relación de orden sobre a. Si b tiene más de un elemento, todos sus elementos son maximales, pero no tiene elemento máximo. Por otro lado, si a es un conjunto totalmente ordenado, un elemento maximal de b debe ser necesariamente el elemento máximo de b.

Si en las definiciones anteriores cambiamos $\leq$ por $\geq$, obtenemos las definiciones de **cota inferior**, **cota inferior estricta**, **elemento mínimo** o **primer elemento**, **acotado inferiormente** y **elemento minimal**.

Se define el **supremo** de b como el mínimo, si existe, del conjunto de las cotas superiores de b en a. En otras palabras, $s \in a$ es el supremo de b si y sólo si satisface las dos propiedades siguientes:

S1) $s \in a$ y $x \leq s$ para todo $x \in b$,

S2) si $z \in a$ y $x \leq z$ para todo $x \in b$, entonces $s \leq z$.

Es claro que el supremo, si existe, es único.

Análogamente, se define el **ínfimo** de b como el máximo, si existe, de las cotas inferiores de b en a.

Veremos ahora como se puede definir la noción de función dentro de nuestra teoría.
DEFINICIONES: Una **función** es una relación f tal que

$$\forall x \forall y \forall z(((\langle x,y\rangle \in f) \wedge (\langle x,z\rangle \in f)) \rightarrow y = z).$$

Si $x \in dom(f)$, el único y tal que $\langle x,y\rangle \in f$ será indicado por $f(x)$.

Sea $f \subseteq a \times b$ una función. Si $c \subseteq dom(f)$, la **imagen de** c **por** f es el conjunto $f^{\rightarrow}(c) = \{y \in b : \exists\ x \in c\ (y = f(x))\}$. La imagen de $dom(f)$ por f se llama la **imagen de** f y se la simboliza por $img(f)$.

NOTACIÓN $f : a \rightarrow b$ significa que f *es una función tal que* $dom(f) = a$ *e* $img(f) \subseteq b$.

Una función $f : a \rightarrow b$ se dice **inyectiva** si y sólo si

$$\forall x \in a \forall t \in a((f(x) = f(t)) \rightarrow (x = t)),$$

se dice **sobreyectiva** si y sólo si $img(f) = b$ y se dice **biyectiva** o una **biyección** si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva.

Supondremos al lector familiarizado con las propiedades básicas de las relaciones y funciones. En este punto sólo queremos destacar que relaciones y funciones pueden definirse como conjuntos dentro de la teoría axiomática que estamos desarrollando.

Sean a e I conjuntos. Una función $f : I \rightarrow a$ suele representarse en la forma de una **familia de conjuntos** indexada por I, $\{x_i\}_{i\in I}$, donde $x_i = f(i)$. Con esta notación se omite mencionar a la función f, pero hay que tener presente que para que tenga sentido, debe existir un conjunto a tal que $x_i \in a$ para todo $i \in I$. En este caso $f = \{t \in I \times a : t = \langle i, x_i\rangle\}$.

Definimos la **unión de una familia** como el conjunto $\bigcup_{i\in I} x_i = \cup\, img(f)$, y si $img(f) \neq \emptyset$, definimos la **intersección** como $\bigcap_{i\in I} x_i = \cap\, img(f)$.

Todo conjunto puede representarse como familia de sus elementos: Si $f : I \rightarrow a$ es una función sobreyectora, $a = \{x_i\}_{i\in I}$. En particular si $I = a$ y f es la función identidad, $a = \{x_x\}_{x\in a}$.

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4.1. *Escriba una fórmula que exprese* $\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle$ *usando sólo los símbolos oroginales del alfabeto.*

Ejercicio 1.4.2. *Sea* $\varphi(x,y) = ((\exists y(y \in x)) \vee (\forall x(\neg(x \in y))))$.

A) Escriba la fórmula $\varphi(x|z,y)$.

B) Si reemplazamos las apariciones libres de x *por* y*, la fórmula que se obtiene ¿Expresará lo mismo que la original?*

Ejercicio 1.4.3. *¿De cuales de los siguientes conjuntos es x un elemento, un subconjunto o ninguna de las dos cosas?*

A) $\{\{x\}, y\}$,

B) x,

C) $\emptyset \cap x$,

D) $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$,

E) $\{x\} \cup x$,

F) $\{x\} \cup \emptyset$.

Ejercicio 1.4.4. *Verifique las siguientes igualdades, donde las letras $a, b, \ldots$ indican conjuntos:*

A) $\cup\, \emptyset = \emptyset$,

B) $\cup\{a\} = a$,

C) *Si $a \in c$, entonces $a \subseteq \cup\, c$.*

D) $\bigcup\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\} = \{a, b, c, d, e, f\}$,

E) $\bigcap\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\} = \{a\}$,

F) $\cup\{a\} = a$ *para todo conjunto* a,

G) $\cap\{a\} = a$ *para todo conjunto* a.

Ejercicio 1.4.5. *Muestre que si a, b son conjuntos, entonces $(\cap a) \cap (\cap b) \subseteq \cap(a \cap b)$, y muestre con ejemplos que la inclusión puede ser propia.*

Ejercicio 1.4.6. *De un ejemplo de dos conjuntos a, b tales que $\mathcal{P}(a \cup b) \neq \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b)$.*

Ejercicio 1.4.7. *Demuestre que $\forall x \bigcup \mathcal{P}(x) = x$, y que $\forall x (x \subseteq \mathcal{P}(\cup x)$, y muestre con ejemplos que esta última inclusión puede ser propia.*

Ejercicio 1.4.8. *Dado un conjunto a, pruebe que $\{a\}$ es un conjunto sin utilizar el Axioma del Par.*

Ejercicio 1.4.9. *Recordar que el par ordenado $\langle a, b\rangle$ está caracterizado por la propiedad:*
$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

A) *Demostrar que la definición de Kuratowski, $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ es adecuada.*

B) *Determinar cuales de estas posibles definiciones de par ordenado serían adecuadas:*

(1) $\langle a,b\rangle_1 = \{\{a,\emptyset\},\{b,\{\emptyset\}\}\}$,

(2) $\langle a,b\rangle_2 = \{\{a,\emptyset\},\{b\}\}$,

(3) $\langle a,b\rangle_3 = \{\{a,\emptyset\},b\}$.

Ejercicio 1.4.10. *Todo par ordenado, por definición, es un conjunto. Muestre con ejemplos que un par ordenado puede tener un único elemento.*

Ejercicio 1.4.11. *Demuestre las siguientes igualdades, donde a, b son conjuntos:*

A) $\bigcap\bigcap\langle a,b\rangle = a$.

B) $(\bigcap\bigcup\langle a,b\rangle)\cup(\bigcup\bigcup\langle a,b\rangle \setminus \bigcup\bigcap\langle a,b\rangle) = b$.

Ejercicio 1.4.12. *Dados los conjuntos a, b, c, pruebe que:*

A) $a\times a = b\times b$ *implica* $a = b$,

B) $a\times b = a\times c$ *y* $a \neq \emptyset$ *implican* $b = c$.

Ejercicio 1.4.13. *Sean a, b, c conjuntos, $r\subseteq a\times b$ y $s\subseteq b\times c$. La composición de las relaciones r y s es la relación*

$$r\circ s = \{\langle x,z\rangle \in a\times c : \exists\ y(\langle x,y\rangle \in r \wedge \langle y,z\rangle) \in s\}.$$

Pruebe que

A) $dom(r\circ s) = \emptyset$ *si y sólo si* $img(r)\cap dom(s) = \emptyset$.

B) $dom(r\circ s)\subseteq dom(r)$ *e* $img(r\circ s)\subseteq img(s)$. *De ejemplos que muestren que las inclusiones pueden ser propias.*

C) Si r y s son funciones, entonces $r\circ s$ es función. ¿Puede ser que la relación $r\circ s$ sea función sin que lo sea alguna de ellas o ambas?

Ejercicio 1.4.14. *Sean a, b conjuntos y sean $p_a\colon a\times b\to a$ y $p_b\colon a\times b\to b$ definidas por $p_a(\langle x,y\rangle) = x$ y $p_b(\langle x,y\rangle) = y$ para todo $\langle x,y\rangle\in a\times b$. Pruebe que p_a y p_b son ambas sobreyectivas y que vale la siguiente propiedad:*

Si c es un conjunto y $f\colon c\to a$ y $g\colon c\to b$, entonces existe una única *$h\colon c\to a\times b$ tal que $p_a\circ h = f$ y $p_b\circ h = g$.*

Ejercicio 1.4.15. *Sea a un conjunto. Pruebe que:*

A) la inclusión entre subconjuntos de a es una relación de orden,

B) si $b\subseteq\mathcal{P}(a)$, entonces $\cup b$ es el supremo de b en $(\mathcal{P}(a),\subseteq)$,

C) si $\emptyset\neq b\subseteq\mathcal{P}(a)$, entonces $\cap\, b$ es el ínfimo de b en $(\mathcal{P}(a),\subseteq)$.

¿ Existe el ínfimo de $\emptyset$ en $(\mathcal{P}(a),\subseteq)$?