Capítulo 2

El axioma del infinito

2.1. El conjunto ω

Ya observamos que con los axiomas anteriores podemos formar conjuntos finitos tan grandes como queramos. El axioma que introduciremos ahora nos permitirá obtener conjuntos infinitos. En particular, nos permitirá expresar al conjunto de los números naturales dentro de la teoría. Conviene destacar que hasta ahora estamos usando "finito" e "infinito" en el sentido intuitivo. Más adelante daremos las definiciones precisas dentro de la teoría.

DEFINICIÓN: Dado un conjunto a, el **siguiente** o **sucesor** de a es $a' = a \cup \{a\}$.

Es claro que la correspondencia $a \mapsto a'$ establece una relación funcional en el universo $\mathcal{U}$. Por iteración podemos, partiendo de $\emptyset$, obtener conjuntos con n elementos:

- $\emptyset$ (0 elementos),
- $\emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ (un elemento),
- $\emptyset'' = \{\emptyset\}' = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (2 elementos),
- $\emptyset''' = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (3 elementos),
- ....

Estos conjuntos servirán para interpretar los números naturales dentro de la teoría. Como veremos en el Capítulo 6, los axiomas vistos hasta ahora no nos garantizan la existencia de un conjunto que tenga a todos ellos como elementos. Por lo tanto debemos postularlo.

DEFINICIÓN: Diremos que un conjunto y es **inductivo**, y escribiremos $Ind(y)$, si y sólo si hace verdadera la siguiente fórmula:

$$\emptyset \in y \ \wedge \ \forall x \ (x \in y \ \rightarrow \ x' \in y).$$

Axioma del Infinito: $\exists y\ Ind(y)$.

Resulta inmediatamente de la definición, que si u es un conjunto no vacío, cuyos elementos son todos conjuntos inductivos, entonces $\cap u$ es un conjunto inductivo.

Sea a un conjunto inductivo y sea $c(a) = \{x \in \mathcal{P}(a) : Ind(x)\}$. Como $a \in c(a)$, $c(a) \neq \emptyset$, luego $\omega = \cap c(a)$ es un conjunto inductivo. Si b es cualquier conjunto inductivo, $a \cap b \in c(a)$. Luego $\omega \subseteq b$. Resulta así que ω *es un conjunto inductivo mínimo*, en el sentido que está contenido en todo otro conjunto inductivo. Por el Axioma de Extensionalidad este conjunto inductivo mínimo es único.

DEFINICIÓN: El conjunto ω será llamado el **conjunto de los números naturales**, y los elementos de ω serán llamados **números naturales**.

El siguiente teorema, que expresa el principio de inducción finita, es una consecuencia inmediata de la minimalidad de ω.

Teorema 2.1.1. $\forall x\ [(x \subseteq \omega \wedge Ind(x)) \rightarrow x = \omega]$.

DEFINICIÓN: Diremos que un conjunto x es **transitivo**, y escribiremos $Trans(x)$, si y sólo si $\forall t\ (t \in x\ \rightarrow\ t \subseteq x)$.

En otras palabras, un conjunto a es transitivo si y sólo si

$$\forall\ x \forall\ y(((x \in y) \wedge (y \in a)) \rightarrow (x \in a)).$$

Teorema 2.1.2. $Trans(\emptyset)\ \wedge\ \forall x\ (Trans(x)\ \rightarrow\ Trans(x'))$. *En palabras: el conjunto vacío es transitivo, y si x es transitivo, su sucesor x' también lo es.*

Demostración. La expresión $(x \in \emptyset\ \rightarrow\ x \subseteq \emptyset)$ es verdadera para todo x porque $x \in \emptyset$ es falso para todo x. Por lo tanto $\emptyset$ es transitivo. Sea x transitivo. Si $y \in x'$, entonces $(y \in x) \vee (y = x)$ y en ambos casos tenemos $y \subseteq x$. $\square$

Corolario 2.1.3. $\forall x\ (x \in \omega\ \rightarrow\ Trans(x))$, *esto es, todo los elementos de ω son transitivos.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.2 el conjunto $a = \{x \in \omega :\ Trans(x)\}$ es inductivo; como $a \subseteq \omega$, $a = \omega$. $\square$

Corolario 2.1.4. *Para todo $n \in \omega$, n' está caracterizado por las dos propiedades siguientes: $n \in n'$ y $\forall x \in \omega((n \in x) \rightarrow (n' \subseteq x))$.* $\square$

En general, que todos los elementos de un conjunto sean transitivos no implica que el conjunto sea transitivo, como lo muestra el siguiente ejemplo: $\{\{\emptyset\}\}$.

Teorema 2.1.5. *ω es transitivo.*

Demostración. Sea $a = \{x \in \omega :\ x \subseteq \omega\}$. Veremos que a es inductivo. Como ω es inductivo, $\emptyset \in \omega$; además $\emptyset \subseteq \omega$, por lo tanto $\emptyset \in a$. Sea $x \in a$. Tomemos $y \in x' = x \cup \{x\}$, entonces $y \in x\ \vee\ y = x$. Si $y = x$, entonces $y \in \omega$; por otra parte, si $y \in x$, como $x \subseteq \omega$, tenemos que $y \in \omega$. Por lo tanto $x' \subseteq \omega$. Como ω es inductivo, $x \in \omega$ implica que $x' \in \omega$; por consiguiente $x' \in a$.

Con esto hemos demostrado que a es inductivo y como $a \subseteq \omega$, tenemos que $a = \omega$. Esto significa que para todo $n \in \omega$, $n \subseteq \omega$. □

El teorema anterior muestra que los elementos de un número natural son números naturales. Intuitivamente, tenemos $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = 1' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} \ldots n' = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Lema 2.1.6. $\forall x\ \forall y\ [(Trans(x) \ \wedge\ y' \subseteq x') \ \rightarrow\ y \subseteq x]$. *Esto es, si x es transitivo e y' es un subconjunto de x', entonces y es un subconjunto de x.*

Demostración. Como $y \in y'$, $y' \subseteq x'$ implica $y \in x'$; entonces $y \in x$ o y es igual a x. Como x es transitivo ambas posibilidades para y muestran que y es un subconjunto de x. □

Corolario 2.1.7. *Si $m, n \in \omega$, entonces $(m' = n') \rightarrow (m = n)$.* □

El lector no tendrá ahora dificultad en verificar el conjunto ω satisface los conocidos Axiomas de Peano que caracterizan al conjunto de los números naturales. Esto justifica nuestra definición. Como los números enteros, racionales, reales y complejos pueden construirse a partir de los naturales por operaciones conjuntistas[1], todos ellos pueden definirse dentro de nuestra teoría axiomática.

Vamos a dirigir ahora nuestra atención a las propiedades de orden de los números naturales.

Lema 2.1.8. $\forall x\ ((Trans(x) \wedge\ x \notin x) \rightarrow\ x' \notin x')$*: Si x es transitivo y no pertenece a sí mismo, el siguiente de x tampoco.*

Demostración. Si $x' \in x'$, se sigue que $(x' \in x) \vee (x' = x)$. Como x es transitivo tenemos que $x' \subseteq x$, y esto implica que $x \in x$. □

Lema 2.1.9. $\forall n\ [(n \in \omega) \ \rightarrow\ (n \notin n)]$*: Ningún elemento de ω es miembro de si mismo.*

Demostración. Sea $a = \{n \in \omega :\ \ n \notin n\}$. El conjunto vacío pertenece a a porque $\neg(\emptyset \in \emptyset)$. Si $n \in a$, tenemos que n es transitivo y $n \notin n$, y por el Lema 2.1.8, $n' \notin n'$, entonces $n' \in a$. Por consiguiente a es inductivo. Luego por el Teorema 2.1.1 $a = \omega$. □

Teorema 2.1.10. *Dados m y n en ω, se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones: $n \in m$, $m \in n$, $n = m$.*

Demostración. Veamos primero que a lo sumo se puede satisfacer una de las condiciones. En efecto, si $m = n$ y $m \in n$, tendríamos $m \in m$, lo que es imposible por el Lema 2.1.9. Análogamente se ve que no puede ocurrir que $m = n$ y $m \in n$. Finalmente, supongamos que $m \in n$ y $m \in n$. Entonces por el

[1]Estas construcciones están tratadas en detalle en los libros de Balanzat y de Landau mencionados en la bibliografía.

Corolario 2.1.3 tendríamos $m \subseteq n$ y $n \subseteq m$, esto es $m = n$, lo que es absurdo por el Lema 2.1.9.

Para $m \in \omega$, sea

$$S(m) = \{n \in \omega \ : \ (n \in m) \vee (m \in n) \vee (n = m)\}.$$

Decir que se cumple al menos una de las tres condiciones, equivale a decir que $S(m) = \omega$ para todo $m \in \omega$. Por lo tanto, para completar la demostración bastará probar que el conjunto

$$S = \{m \in \omega \ : S(m) = \omega\}$$

es inductivo.

Primero veremos que $\emptyset \in S$, esto es, que $S(\emptyset) = \omega$.

Para ver esto mostraremos que $S(\emptyset)$ es inductivo. Es claro que $\emptyset \in S(\emptyset)$. Si $n \in S(\emptyset)$, entonces $(\emptyset \in n) \vee (n = \emptyset)$, lo que implica que $\emptyset \in n' = n \cup \{n\}$, y por lo tanto $n' \in S(\emptyset)$.

Probemos ahora que si $m \in S$, entonces $m' \in S$.

Sea $m \in S$, esto es $S(m) = \omega$. Debemos ver que también $S(m') = \omega$ y para ello probaremos que $S(m')$ es inductivo:

Como ya vimos que $S(\emptyset) = \omega$, tenemos que $m' \in S(\emptyset)$, lo que implica que $\emptyset \in S(m')$.

Sea $x \in S(m')$. Esto es se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones

$$(1) \ x \in m', \qquad (2) \ m' \in x, \qquad (3) \ x = m'.$$

Como por la hipótesis inductiva $S(m) = \omega$, resulta también que $x' \in \omega = S(m)$, esto es

$$(m \in x') \vee (x' \in m) \vee (x' = m).$$

Consideremos cada una de estas posibilidades:

I) Si $m \in x'$ entonces $(m \in x) \vee (x = m)$. Si $x = m$, entonces $x' = m'$, y $x' \in S(m')$. Si $m \in x$, no puede ser que se cumpla (1), por lo tanto deberá cumplirse (2) o (3) y en ambos casos obtenemos que $m' \in x'$, lo que implica que $x' \in S(m')$.

II) Si $x' \in m$, entonces $x' \in m'$ y resulta $x' \in S(m')$.

III) Si $x' = m$, entonces $x' \in m'$. y también ahora $x' \in S(m')$.

En todos los casos $x' \in S(m')$; por lo tanto $S(m') = \omega$, es decir, $m' \in S$. Esto muestra que S es inductivo y por consiguiente igual a ω. □

Corolario 2.1.11. *Para m, n en ω, se tiene que $m \subseteq n \leftrightarrow ((m = n) \vee (m \in n))$.*

Demostración. Supongamos que $m \subseteq n$. No puede ser que $n \in m$, pues esto implicaría que $n \in n$, contrariando el Lema 2.1.9. Luego, por el Teorema 2.1.10, debe ser $(m = n) \vee (m \in n)$. Por otro lado, si $(m = n) \vee (m \in n)$, entonces por el Corolario 2.1.3 resulta que $m \subseteq n$. □

Del Teorema 2.1.10 y del Corolario 2.1.11 resulta que la relación de inclusión $\subseteq$ define un orden total sobre ω.

DEFINICIÓN: Una relación de orden $\leq$ sobre un conjunto a se dice un **buen orden** si y sólo si todo subconjunto no vacío de a tiene primer elemento.

Observaciòn 2.1.12. *Todo conjunto bien ordenado $\langle a, \leq \rangle$ es totalmente ordenado.* En efecto, dados x, y en a, el par $\{x, y\}$ tiene primer elemento, luego debe ser $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Teorema 2.1.13. *La relación de inclusión $\subseteq$ define un buen orden sobre ω.*

Demostración. Ya observamos que $\subseteq$ es una relación de orden. Luego resta probar que todo subconjunto no vacío de ω tiene primer elemento. Supongamos que b es un subconjunto de ω que no tiene primer elemento y sea a el conjunto de las cotas inferiores de b en ω Es claro que $0 = \emptyset \in a$. Como b no tiene elemento mínimo, todas sus cotas inferiores deben ser estrictas, por lo tanto si $n \in a$, entonces $n \in x$ para todo $x \in b$ Luego por el Corolario 2.1.4 tendremos que $\forall\, x \in b\ (n' \subseteq x)$, esto es, que $n' \in a$. Hemos probado así que a es inductivo, y por consiguiente, que $a = \omega$. Supongamos que $b \neq \emptyset$ y sea $m \in b$. Como $m' \in \omega = a$, tendríamos $m' \subseteq m$, lo que es imposible. Luego si b no tiene primer elemento debe ser vacío. $\square$

Es inmediato verificar que si $\langle a, \leq \rangle$ es un conjunto bien ordenado, entonces todo subconjunto b de a, con el orden heredado de a, es bien ordenado. De esta observación y del teorema anterior resulta que:

Corolario 2.1.14. *Para todo $n \in \omega$, se tiene que $\langle\ n, \subseteq\ \rangle$ es un conjunto bien ordenado.* $\square$

2.2. Principio de Inducción Transfinita

Usamos el principio de inducción para probar el buen orden de los números naturales. Veremos ahora que estos dos conceptos están estrechamente vinculados.

Comenzaremos por la siguiente:

DEFINICIÓN: Sea a un conjunto ordenado. Llamaremos **sección inicial** determinada por $y \in a$ al conjunto $a_y = \{x \in a :\ x < y\}$ (recordar que x <y significa que $x \leq y$ y $x \neq y$).

Teorema 2.2.1. *Sea a un conjunto bien ordenado y b un subconjunto de a que satisface la siguiente propiedad:*

$$\text{(P)} \qquad \textit{Para todo } x \in a, \textit{ si } a_x \subset b \textit{ entonces } x \in b.$$

Se tiene que $b = a$.

Demostración. Supongamos, por el absurdo, que exista $b \subset a$ tal que b satisface (P) y $b \neq a$. Entonces $a \setminus b \neq \emptyset$ y tiene primer elemento u. Veamos que $a_u \subset b$. En efecto, si u es el primer elemento de a, entonces $a_u = \emptyset \subset b$. Si u no es el primer elemento de a, entonces $a_u \neq \emptyset$. Sea $x \in a_u$. Como u es el primer elemento de $a \setminus b$, no puede ser que $x \in a \setminus b$, luego $x \in b$. Consecuentemente $a_u \subset b$, y como b satisface (P), resulta que $u \in b$. Pero esto es absurdo, puesto que $u \in a \setminus b$. □

Observaciòn 2.2.2. Sea a bien ordenado y z el primer elemento de a. Como $a_z = \emptyset \subset b$ cualquiera que sea b, se tiene que la condición (P) en el enunciado del teorema anterior puede desdoblarse del modo siguiente:

(P1) $z \in b$

(P2) Para todo $x \in a$, si $y \in b$ para todo $y < x$, entonces $x \in b$.

El hecho de que todo subconjunto $b \subset \omega$ que satisface (P1) y (P2) debe coincidir con ω suele darse frecuentemente como una forma alternativa del principio de inducción finita para los naturales. De hecho, este enunciado equivale a la buena ordenación de ω (ver Ejercicio 2.6.8).

2.3. Ordinales

De los Corolarios 2.1.3 y 2.1.14 y de los Teoremas 2.1.5 y 2.1.13 resulta que tanto los números naturales como ω son conjuntos transitivos bien ordenados por la relación de inclusión. Vamos a estudiar ahora los conjuntos que tienen estas dos propiedades y que constituyen una importante generalización de los números naturales. Comenzaremos por algunas consideraciones generales sobre conjuntos bien ordenados.

DEFINICIÓN: Sea a un conjunto ordenado y $b \subseteq a$. Diremos que b es **decreciente** si $x \in b$ e $y \leq x$ implican que $y \in b$.

Lema 2.3.1. *Sea a un conjunto bien ordenado, $b \subseteq a$ y b decreciente. Si $b \neq a$, entonces existe $z \in a$ tal que $b = a_z$.*

Demostración. Supongamos que $a \setminus b \neq \emptyset$. Como a es bien ordenado, $a \setminus b$ tiene primer elemento z. Mostraremos que $b = a_z$.

Si $y \in a_z$, entonces $y < z$, por lo tanto el elemento y no pertenece a $a \setminus b$ y esto implica que $a_z \subseteq b$.

Si $y \in b$, supongamos que $z \leq y$. El conjunto b es decreciente, entonces $z \in b \cap (a \setminus b) = \emptyset$: absurdo. Por lo tanto $y < z$, es decir $y \in a_z$. □

DEFINICIÓN: Sea a un conjunto, diremos que $\in$ **es un buen orden estricto en** a si y sólo si:

Ord1) $\forall x \; (x \in a \; \rightarrow \; x \notin x)$.