

Del Teorema 2.1.10 y del Corolario 2.1.11 resulta que la relación de inclusión \subseteq define un orden total sobre ω .

DEFINICIÓN: Una relación de orden \leq sobre un conjunto a se dice un **buen orden** si y sólo si todo subconjunto no vacío de a tiene primer elemento.

Observación 2.1.12. *Todo conjunto bien ordenado $\langle a, \leq \rangle$ es totalmente ordenado.* En efecto, dados x, y en a , el par $\{x, y\}$ tiene primer elemento, luego debe ser $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Teorema 2.1.13. *La relación de inclusión \subseteq define un buen orden sobre ω .*

Demostración. Ya observamos que \subseteq es una relación de orden. Luego resta probar que todo subconjunto no vacío de ω tiene primer elemento. Supongamos que b es un subconjunto de ω que no tiene primer elemento y sea a el conjunto de las cotas inferiores de b en ω . Es claro que $0 = \emptyset \in a$. Como b no tiene elemento mínimo, todas sus cotas inferiores deben ser estrictas, por lo tanto si $n \in a$, entonces $n \in x$ para todo $x \in b$. Luego por el Corolario 2.1.4 tendremos que $\forall x \in b (n' \subseteq x)$, esto es, que $n' \in a$. Hemos probado así que a es inductivo, y por consiguiente, que $a = \omega$. Supongamos que $b \neq \emptyset$ y sea $m \in b$. Como $m' \in \omega = a$, tendríamos $m' \subseteq m$, lo que es imposible. Luego si b no tiene primer elemento debe ser vacío. \square

Es inmediato verificar que si $\langle a, \leq \rangle$ es un conjunto bien ordenado, entonces todo subconjunto b de a , con el orden heredado de a , es bien ordenado. De esta observación y del teorema anterior resulta que:

Corolario 2.1.14. *Para todo $n \in \omega$, se tiene que $\langle n, \subseteq \rangle$ es un conjunto bien ordenado.* \square

2.2. Principio de Inducción Transfinita

Usamos el principio de inducción para probar el buen orden de los números naturales. Veremos ahora que estos dos conceptos están estrechamente vinculados.

Comenzaremos por la siguiente:

DEFINICIÓN: Sea a un conjunto ordenado. Llamaremos **sección inicial** determinada por $y \in a$ al conjunto $a_y = \{x \in a : x < y\}$ (recordar que $x < y$ significa que $x \leq y$ y $x \neq y$).

Teorema 2.2.1. *Sea a un conjunto bien ordenado y b un subconjunto de a que satisface la siguiente propiedad:*

$$(P) \quad \text{Para todo } x \in a, \text{ si } a_x \subset b \text{ entonces } x \in b.$$

Se tiene que $b = a$.

Demostración. Supongamos, por el absurdo, que exista $b \subset a$ tal que b satisface (P) y $b \neq a$. Entonces $a \setminus b \neq \emptyset$ y tiene primer elemento u . Veamos que $a_u \subset b$. En efecto, si u es el primer elemento de a , entonces $a_u = \emptyset \subset b$. Si u no es el primer elemento de a , entonces $a_u \neq \emptyset$. Sea $x \in a_u$. Como u es el primer elemento de $a \setminus b$, no puede ser que $x \in a \setminus b$, luego $x \in b$. Consecuentemente $a_u \subset b$, y como b satisface (P), resulta que $u \in b$. Pero esto es absurdo, puesto que $u \in a \setminus b$. \square

Observación 2.2.2. Sea a bien ordenado y z el primer elemento de a . Como $a_z = \emptyset \subset b$ cualquiera que sea b , se tiene que la condición (P) en el enunciado del teorema anterior puede desdoblarse del modo siguiente:

(P1) $z \in b$

(P2) Para todo $x \in a$, si $y \in b$ para todo $y < x$, entonces $x \in b$.

El hecho de que todo subconjunto $b \subset \omega$ que satisface (P1) y (P2) debe coincidir con ω suele darse frecuentemente como una forma alternativa del principio de inducción finita para los naturales. De hecho, este enunciado equivale a la buena ordenación de ω (ver Ejercicio 2.6.8).

2.3. Ordinales

De los Corolarios 2.1.3 y 2.1.14 y de los Teoremas 2.1.5 y 2.1.13 resulta que tanto los números naturales como ω son conjuntos transitivos bien ordenados por la relación de inclusión. Vamos a estudiar ahora los conjuntos que tienen estas dos propiedades y que constituyen una importante generalización de los números naturales. Comenzaremos por algunas consideraciones generales sobre conjuntos bien ordenados.

DEFINICIÓN: Sea a un conjunto ordenado y $b \subseteq a$. Diremos que b es **decreciente** si $x \in b$ e $y \leq x$ implican que $y \in b$.

Lema 2.3.1. *Sea a un conjunto bien ordenado, $b \subseteq a$ y b decreciente. Si $b \neq a$, entonces existe $z \in a$ tal que $b = a_z$.*

Demostración. Supongamos que $a \setminus b \neq \emptyset$. Como a es bien ordenado, $a \setminus b$ tiene primer elemento z . Mostraremos que $b = a_z$.

Si $y \in a_z$, entonces $y < z$, por lo tanto el elemento y no pertenece a $a \setminus b$ y esto implica que $a_z \subseteq b$.

Si $y \in b$, supongamos que $z \leq y$. El conjunto b es decreciente, entonces $z \in b \cap (a \setminus b) = \emptyset$: absurdo. Por lo tanto $y < z$, es decir $y \in a_z$. \square

DEFINICIÓN: Sea a un conjunto, diremos que \in es un **buen orden estricto sobre a** si y sólo si:

$Ord_1 \quad \forall x (x \in a \rightarrow x \notin x)$.

$Ord_2 \forall x \forall y \forall z [(x \in a \wedge y \in a \wedge z \in a \wedge x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z]$.

$Ord_3 \forall u \{(u \subseteq a \wedge u \neq \emptyset) \rightarrow \exists z [z \in u \wedge \forall x (x \in u \wedge x \neq z \rightarrow z \in x)]\}$

Observación 2.3.2. \in es un buen orden estricto sobre a si y sólo si se satisface Ord_1 y $r_\in = \{\langle x, y \rangle \in a \times a : (x \in y) \vee (x = y)\}$ es un buen orden sobre a (comparar con el Lema 1.3.2).

DEFINICIÓN: Diremos que un conjunto x es un **ordinal** y escribiremos $Ord(x)$, si y sólo si \in es un buen orden estricto sobre x y x es transitivo. Es decir, $Ord(x)$ es la conjunción $Ord_1(x) \wedge Ord_2(x) \wedge Ord_3(x) \wedge Trans(x)$.

De los Teoremas 2.1.5 y 2.1.13 y de los Corolarios 2.1.11, 2.1.3, 2.1.14 resulta que ω y todos los números naturales son ordinales.

En general usaremos letras griegas para designar ordinales. Por ejemplo, la notación $\forall \alpha$ abreviará $\forall y (Ord(y) \rightarrow \dots)$.

Teorema 2.3.3. Si α es un ordinal, entonces:

- i) $\alpha \notin \alpha$.
- ii) Si $x \in \alpha$, entonces $Ord(x)$.
- iii) Si $\beta \in \alpha$, entonces $\alpha_\beta = \beta$.
- iv) $Ord(\alpha')$

Demostración. i) Por Ord_1 , $(\alpha \in \alpha) \rightarrow (\alpha \notin \alpha)$. Por lo tanto α no puede pertenecer a α .

ii) Sea $x \in \alpha$. Como α es transitivo, $x \subseteq \alpha$; por consiguiente Ord_1 , Ord_2 y Ord_3 se cumplen para x . Resta ver que x es transitivo. Sea $t \in x$ y $s \in t$. Como α es transitivo, $t \in \alpha$ y $s \in \alpha$. Por Ord_2 , tenemos que $s \in x$; por consiguiente x es transitivo. Luego x satisface todas las propiedades de la definición de ordinal.

iii) Si $\beta \in \alpha$, como el orden lo da la relación de pertenencia,

$$\alpha_\beta = \{x \in \alpha : x < \beta\} = \{x \in \alpha : x \in \beta\} = \alpha \cap \beta = \beta$$

ya que $\beta \subseteq \alpha$.

iv) Si $x \in \alpha'$, entonces $x \in \alpha$ ó $x = \alpha$. Por la propiedad i) y Ord_1 tenemos que en ambos casos $x \notin x$.

Supongamos que x, y, z están en α' y que $x \in y \in z$. Si los tres pertenecen a α , entonces $x \in z$. Caso contrario, como acabamos de ver que α' satisface Ord_1 , a lo sumo uno de ellos puede ser α . Si fuese $x = \alpha$, tendríamos $\alpha \in y$, y como $y \in \alpha$ y α es transitivo, tendríamos $\alpha \in \alpha$, lo que es imposible. Análogamente podemos ver que no puede ser $y = \alpha$. Por lo tanto $z = \alpha$ y Ord_3 se reduce a la transitividad de α . Por lo tanto α' satisface Ord_2 .

Sea $u \subseteq \alpha'$ y $u \neq \emptyset$. Si $u \cap \alpha \neq \emptyset$, entonces es un subconjunto no vacío de α , luego por Ord_3 existe $z \in u \cap \alpha$ tal que $z \in x$ para todo $x \in u \cap \alpha$, $z \neq x$. Como $z \in \alpha$, resulta que $z \in x$ para todo $x \in u$, $x \neq z$. Si $u \cap \alpha = \emptyset$, entonces $u = \{\alpha\}$, que tiene a α como primer elemento. Luego se satisface Ord_3 . Finalmente, por el Teorema 2.1.2, $Trans(\alpha) \rightarrow Trans(\alpha')$; por consiguiente α' es un ordinal. \square

Teorema 2.3.4. *Si α y β son ordinales, una y sólo una de las siguientes fórmulas es verdadera: $(\alpha \in \beta)$, $(\beta \in \alpha)$ ó $(\alpha = \beta)$.*

Demostración. La transitividad de los ordinales y la propiedad (i) del Teorema 2.3.3 implican que las tres condiciones son mutuamente incompatibles (ver la demostración del Teorema 2.1.10). Para ver que al menos una de las condiciones se cumple, sea $c = \alpha \cap \beta$. Si $t \in x \in c$, $x \in \alpha$ y $x \in \beta$; como α y β son transitivos, $t \in \alpha$ y $t \in \beta$, esto es $t \in c$; por consiguiente c es un subconjunto decreciente tanto de α como de β . Entonces por el Lema 2.3.1 y (iii) del Teorema 2.3.3 se tiene que c es un ordinal tal que $c = \alpha$ ó $c \in \alpha$. Análogamente se ve que $c = \beta$ ó $c \in \beta$. Combinando estas posibilidades resultan los 4 casos siguientes:

- (1) $c = \alpha$ y $c = \beta$,
- (2) $c = \alpha$ y $c \in \beta$,
- (3) $c \in \alpha$ y $c = \beta$,
- (4) $c \in \alpha$ y $c \in \beta$.

Por (ii) del Teorema 2.3.3 los casos (1), (2) y (3) corresponden a $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$, respectivamente. El caso (4) es imposible. En efecto, otra vez por (ii) del Teorema 2.3.3, (4) implicaría que c es un ordinal y que $c \in \alpha \cap \beta = c$, lo que es imposible por (i) del mismo teorema. \square

Observación 2.3.5. Razonando como en la demostración del Corolario 2.1.11, de la transitividad de los ordinales y del Teorema 2.3.4 podemos deducir que *si α y β son ordinales, entonces $(\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$. Además se tiene que $\alpha \in \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta \leftrightarrow \alpha = \beta_\alpha$.*

Teorema 2.3.6. *Sea a un conjunto de ordinales, estos es $\forall x (x \in a \rightarrow Ord(x))$. Entonces se cumple que:*

- (I) *a está bien ordenado por la relación de inclusión.*
- (II) *Si a es transitivo, entonces es un ordinal.*
- (III) *$\cup a$ es un ordinal.*

Demostración. (i) Por el Teorema 2.3.4 y la Observación 2.3.5, sabemos que a está totalmente ordenado por \subseteq . Para ver que está bien ordenado, sea $b \subseteq a$, $b \neq \emptyset$, y sea $\alpha \in b$. Si $\alpha \subseteq \beta$ para todo β en b , entonces α es el primer elemento de b . Si no, existe β en b tal que $\beta \in \alpha$. De esto resulta que $\alpha \cap b \neq \emptyset$. Entonces, como α es bien ordenado, $\alpha \cap b$ tiene primer elemento, que llamaremos γ . Sea δ en b . Si δ está en $b \setminus \alpha$, $\delta \notin \alpha$, entonces $\gamma \in \alpha \subseteq \delta$, y por lo tanto $\gamma \in \delta$. Si $\delta \in \alpha \cap b$, tenemos que $\gamma \subseteq \delta$. Luego γ es el primer elemento de b .

(ii) Por (i) del Teorema 2.3.3 los elementos de a satisfacen Ord_1 , y teniendo en cuenta las Observaciones 2.3.2 y 2.3.5, de (i) resulta que \in es un buen orden estricto sobre a , y como a es transitivo por hipótesis, a es un ordinal.

(iii) Como $\cup a$ es también un conjunto de ordinales, por (ii) bastará probar que $\cup a$ es transitivo. Sea $\beta \in \cup a$. Por la definición de la unión, existe $\alpha \in a$ tal que $\beta \in \alpha$, y como α es transitivo, resulta que $\beta \subseteq \alpha \subseteq \cup a$. \square

Observación 2.3.7. *La propiedad (iii) en el teorema anterior nos dice que el supremo, con respecto a la relación de inclusión, de un conjunto de ordinales es un ordinal (ver Ejercicio 1.4.15).*

Corolario 2.3.8. *No existe un conjunto que tenga entre sus elementos a todos los ordinales.*

Demostración. Supongamos que existiese un conjunto b tal que $\forall x (Ord(x) \rightarrow x \in b)$. Entonces podríamos formar el conjunto $a = \{x \in b : Ord(x)\}$, esto es a sería el conjunto de todos los ordinales: $\forall x (Ord(x) \leftrightarrow x \in a)$. Como por (ii) del Teorema 2.3.3 a sería transitivo, de (ii) del teorema anterior resultaría que a es un ordinal y por lo tanto que $a \in a$, en contradicción con (i) del Teorema 2.3.3. \square

El enunciado del corolario anterior, conocido como la **Paradoja de Burali-Forti**, fue publicado en 1897 por el matemático italiano Cesare Burali-Forti (aunque parece que el mismo Cantor ya la había descubierto en 1895). Es otra paradoja de la teoría ingenua de conjuntos desarrollada por Cantor, pero al depender de una noción compleja como la de ordinal no tuvo el mismo impacto que la Paradoja de Russell, que utiliza sólo las nociones más intuitivas de conjunto y pertenencia. Para nosotros, la Paradoja de Burali-Forti significa simplemente que la clase $\{x : Ord(x)\}$ no es un conjunto.

2.4. Conjuntos Finitos

Vamos a ver ahora como se pueden caracterizar los números naturales, esto es, los elementos de ω , en términos de ordinales. Comenzaremos por la siguiente:

Observación 2.4.1. *Si α es un ordinal, su siguiente α' está caracterizado por las dos propiedades siguientes (comparar con el Corolario 2.1.4): (i) $\alpha \in \alpha'$, y (ii) si $Ord(\beta)$ y $\alpha \subset \beta$, entonces $\alpha' \subseteq \beta$.*

DEFINICIÓN: Un ordinal α tiene un **antecesor** si existe β tal que $\alpha = \beta'$. Si $\alpha \neq \emptyset$ y no tiene antecesor inmediato, diremos que α es **límite**.

Teorema 2.4.2. *Para todo ordinal α , las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i) α es límite.
- ii) α es inductivo.
- iii) $\cup\alpha = \alpha$ y $\alpha \neq \emptyset$.

Demostración. i) implica ii): Como $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \notin \emptyset$ debe ser $\emptyset \in \alpha$. Si $\beta \in \alpha$, entonces por la Observación 2.4.1 tenemos que $\beta' \subseteq \alpha$, y como no puede ser $\beta' = \alpha$, debemos tener que $\beta' \in \alpha$. Hemos probado así que $\text{Ind}(\alpha)$.

ii) implica iii): Si α es inductivo, entonces $t \in \alpha \rightarrow t' \in \alpha$. Como α es transitivo, esto implica que $t' \subseteq \alpha$, y por consiguiente, que $t \in \cup\alpha$. Luego $\alpha \subseteq \cup\alpha$. Por otra parte, si $t \in \cup\alpha$, hay un β en α tal que $t \in \beta$, como α es transitivo por ser ordinal, tenemos $t \in \alpha$. Luego también $\cup\alpha \subseteq \alpha$.

iii) implica i): supongamos que iii) es verdadero y que existe un ordinal γ tal que $\alpha = \gamma'$. Entonces $\gamma' = \alpha = \cup\alpha = \cup\gamma' = \gamma$; esto implica $\gamma \in \gamma$ que es absurdo por ser γ ordinal. \square

De (ii) del teorema anterior se sigue que ω es un ordinal límite.

DEFINICIÓN: Diremos que α es un **ordinal finito**, y escribiremos $\text{Ordfin}(\alpha)$ si ni él ni sus elementos son límites:

$$\forall x((x \subseteq \alpha) \rightarrow ((x = \emptyset) \vee (\exists \beta(x = \beta')))).$$

Teorema 2.4.3. $\forall x (\text{Ordfin}(x) \leftrightarrow x \in \omega)$. *Esto es, los números naturales coinciden con los ordinales finitos.*

Demostración. Veamos primero que todos los elementos de ω son ordinales finitos. Sea $a = \{x \in \omega : \text{Ordfin}(x)\}$. El vacío pertenece a ω y es un ordinal finito por definición, por lo tanto es un elemento de a . Si $x \in a$, como ω es inductivo $x' \in \omega$ y el ítem iv) del Teorema 2.3.3, x' es un ordinal. Dado que x' no es ordinal límite y sus elementos tampoco (porque x es ordinal finito), tenemos que x' es finito. Hemos probado que a es inductivo y por lo tanto $\omega = a$.

Ahora veamos que todos los ordinales finitos pertenecen a ω . Si x un ordinal finito, por el Teorema 2.3.4 $x \in \omega \vee \omega \in x \vee x = \omega$, pero como ω es ordinal límite, no puede pertenecer a x ni ser igual a x , por consiguiente $x \in \omega$. \square

Este último teorema podría hacer pensar que se podría prescindir del Axioma del Infinito. En efecto, si bien los números naturales sirvieron para motivar la introducción de los ordinales, la demostración de las propiedades de estos últimos no dependieron de ningún resultado sobre números naturales. Por lo tanto los ordinales podrían haberse definido antes de introducir el Axioma del Infinito y posteriormente introducir los naturales como los ordinales finitos. Pero como los ordinales no forman un conjunto (Paradoja de Burali-Forti), no tendríamos medios para probar la existencia del conjunto de los ordinales finitos (esto se verá con precisión en el Teorema 6.2.4). De modo que aún siguiendo este camino

necesitaríamos de un axioma para garantizar la existencia del conjunto de los ordinales finitos. Este camino es posible y de hecho es el seguido en muchos tratamientos de la teoría axiomática de conjuntos. El siguiente teorema muestra como el Axioma del Infinito puede ser formulado en términos de ordinales.

Teorema 2.4.4. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- I) *Existe un conjunto inductivo (Axioma del Infinito).*
- II) *Existe un conjunto c que tiene entre sus elementos a todos los ordinales finitos.*
- III) *Existe un ordinal límite.*

Demostración. *i)* implica *ii)*: Como todo conjunto inductivo contiene a ω , la implicación resulta del Teorema 2.4.3.

ii) implica *iii)*: Supongamos que existe c con la propiedad requerida. Sea $a = \{x \in c : \text{Ordfin}(x)\}$. Tomemos $x \in a$. Si $t \in x$, entonces t es ordinal finito porque x es ordinal finito (en efecto, si $s \in t$, entonces $s \in x$ porque x es transitivo por lo tanto s no es ordinal límite), por consiguiente $t \in a$; esto muestra que a es transitivo. Como a es un conjunto transitivo de ordinales, a es un ordinal. Si a fuese finito, tendríamos que $a \in a$, lo que no es posible. Por lo tanto a es infinito y como todos sus elementos son finitos, a debe ser un ordinal límite.

iii) implica *i)*: Esta implicación es el resultado obtenido en el Teorema 2.4.2. \square

Observación 2.4.5. Hemos definido a ω como el menor conjunto inductivo con respecto a la inclusión. Del Teorema 2.4.3 resulta que también ω es el menor ordinal infinito con respecto a la inclusión: $\forall x ((\text{Ord}(x) \wedge \neg \text{Ordfin}(x)) \rightarrow (\omega \subseteq x))$. Esta propiedad suele expresarse diciendo que ω es el primer ordinal transfinito.

Nos proponemos ahora definir la noción de conjunto finito.

DEFINICIÓN: Diremos que a y b son **equipotentes**, y escribiremos $\bar{a} = \bar{b}$, si existe una función de a en b biyectiva.

DEFINICIÓN: El conjunto a es **finito**, si existe $n \in \omega$ tal que $\bar{n} = \bar{a}$.

Teorema 2.4.6. I) *Si $n \in \omega$ y $a \subset n$ entonces, existe $k \in n$ tal que $\bar{k} = \bar{a}$.*

II) *Si $k \in n$ entonces, $\bar{k} \neq \bar{n}$*

Demostración. *i)* Sea $s = \{n \in \omega : \forall x ((x \subset n) \rightarrow \exists k (k \in n \wedge \bar{k} = \bar{x}))\}$. Veremos que s es inductivo y por lo tanto igual a ω .

Es claro que $\emptyset \in s$. Supongamos que $n \in s$ y sea $x \subset n' = n \cup \{n\}$. Consideraremos los dos casos siguientes:

Caso 1: $n \notin x$. Entonces $x \subset n$ o $x = n$. Como $x \in s$, $x \subset n$ implica que existe $k \in n \subset n'$ tal que $\bar{k} = \bar{x}$. Si $x = n$, entonces $\bar{n} = \bar{x}$, y $n \in n'$. Por lo tanto en este caso se tiene que $x' \in s$.

Caso 2: $n \in x$. Sea $y = x \setminus \{n\}$. Como $y \subset x$, por la hipótesis inductiva resulta que existe $k \in n$ tal que $\bar{k} = \bar{y}$, es decir, existe una función biyectiva $f: y \rightarrow k$. Sea $g: x \rightarrow k'$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in y, \\ k & \text{si } t = n. \end{cases}$$

Claramente g es biyectiva, lo que significa que $\bar{k}' = \bar{x}$. Para terminar de probar que también en este caso $n' \in s$, hay que ver que $k' \in n'$. Como $n' \subseteq k'$ implicaría que $n \in k$ o $n = k$, lo que contradiría $k \in n$, por el Corolario 2.1.11 debe ser $k' \in n'$. Por lo tanto $n' \in s$ y completamos la demostración de (i).

ii) Sea $a = \{n \in \omega : \forall k(k \in n \rightarrow \bar{k} \neq \bar{n})\}$. Probaremos que a es inductivo. $\emptyset \in a$ porque para todo k es falso $k \in \emptyset$. Si $n \in a$ veremos que $n' \in a$. Supongamos que $n' \notin a$, entonces existe $k \in n'$ y una función biyectiva $f: n' \rightarrow k$. La función $g: n \rightarrow k \setminus \{f(n)\}$, determinada por $g(t) = f(t)$ para todo $t \in n$ es biyectiva, entonces $\bar{n} = \overline{k \setminus \{f(n)\}}$. Por otra parte, como $k \setminus \{f(n)\} \subset k$, por i) existe $j \in k$ tal que $\bar{j} = \overline{k \setminus \{f(n)\}}$. Dado que $k \subseteq n$, tenemos $j \in n$ y $\bar{j} = \bar{n}$, contradiciendo $n \in a$. \square

Corolario 2.4.7. *Cada uno de los enunciados listados a continuación implica al siguiente:*

- i) x es un conjunto finito.
- ii) Existe un único n en ω tal que $\bar{n} = \bar{x}$
- iii) Si $y \subseteq x$, entonces y es finito.
- iv) Si $y \subseteq x$ y $\bar{y} = \bar{x}$, entonces $x = y$.

Demostración. i) implica ii): Si n y m están en ω y $\bar{n} = \bar{x} = \bar{m}$, por el teorema anterior $n \notin m$ y $m \notin n$, por lo tanto $n = m$.

ii) implica iii): Existe un único n tal que existe una $f: x \rightarrow n$ biyectiva. Si $y \subseteq x$, sea $g = f|_y$. Como f es biyectiva, $\text{img}(g) \subset n$, entonces existe $k \in n$ tal que $\bar{k} = \overline{\text{img}(g)} = \bar{y}$.

iii) implica iv): Como $x \subseteq x$, x es finito. Si $y \subseteq x$ y $\bar{x} = \bar{y}$, sea $n \in \omega$ tal que $\bar{x} = \bar{n}$. Supongamos que $x \neq y$. Con un argumento similar al dado en la demostración de ii) \rightarrow iii), se ve que existe $k \in n$ tal que $\bar{y} = \bar{k}$, entonces $\bar{n} = \bar{x} = \bar{y} = \bar{k}$ que es absurdo por el teorema anterior. \square

En realidad los enunciados listados en el corolario anterior son equivalentes, pero para demostrar que iv) implica i) se requiere del Axioma de Elección, que presentaremos en el Capítulo 4.

Para los ordinales tenemos dos conceptos de "finitud": una, la de ordinal finito, otra la de ser finito como conjunto. Resulta del corolario anterior que ambas nociones coinciden:

Corolario 2.4.8. *Un ordinal α es un conjunto finito si y sólo si es un número natural.*

Demostración. Es claro que los números naturales son conjuntos finitos. Por otra parte ω es un conjunto infinito. En efecto, si fuese ω finito existiría $n \in \omega$ tal que $\bar{\omega} = \bar{n}$, y como $n \subseteq \omega$, por *iv)* del Corolario 2.4.7 resultaría que $\omega = n$, lo que es absurdo. Sea ahora α un ordinal que es un conjunto finito. Tenemos que $(\alpha \in \omega) \vee (\omega \subseteq \alpha)$; pero si $\omega \subseteq \alpha$, por *iii)* del Corolario 2.4.7 resultaría ω finito. \square

Observación 2.4.9. De *ii)* del Corolario 2.4.7 resulta que no puede haber una biyección entre dos números naturales distintos. En particular, se tiene que $\bar{n} \neq \bar{n}'$. Esta propiedad también caracteriza a los ordinales finitos. En efecto, si α es un ordinal no finito, entonces $\omega \subseteq \alpha$. Sea $f: \alpha \rightarrow \alpha \setminus \{\emptyset\}$ definida por

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta & \text{si } \beta \in \alpha \setminus \omega \\ \beta' & \text{si } \beta \in \omega \end{cases}$$

f es biyectiva, por lo tanto $\bar{\alpha} = \overline{\alpha \setminus \{\emptyset\}}$. Si definimos $g: \alpha' \rightarrow \alpha$ dada por $g(t) = f(t)$ para $t \in \alpha$ y $g(\alpha) = \emptyset$, vemos que g es también biyectiva. Luego $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$.

2.5. Principio de Inducción Sobre los Ordinales

Como todo ordinal es un conjunto bien ordenado, satisface el principio de inducción transfinita. El teorema que sigue, conocido como **Principio de Inducción Sobre los Ordinales**, extiende este principio a la *clase* de los ordinales.

Teorema 2.5.1. *Sea φ una fórmula con una única variable libre.*

$$(\forall \alpha \{[\forall \beta (\beta \in \alpha) \rightarrow \varphi(\beta)] \rightarrow \varphi(\alpha)\}) \rightarrow \forall \gamma \varphi(\gamma)$$

Esto es, si una fórmula vale para un ordinal siempre que valga para sus anteriores, entonces vale para todos los ordinales.

Demostración. Supongamos que existe un γ tal que $\neg \varphi(\gamma)$. Sea

$$c = \{\beta \in \gamma' : (\beta \leq \gamma) \wedge \neg \varphi(\beta)\}.$$

El conjunto c es no vacío, pues $\gamma \in c$. Sea γ_0 , el primer elemento de c . Si $\beta \in \gamma_0$ entonces $\varphi(\beta)$ es verdadera, de lo contrario γ_0 no sería el primer elemento de c . Por lo tanto, $\forall \beta (\beta \in \gamma_0 \rightarrow \varphi(\beta))$ y por hipótesis implica $\varphi(\gamma_0)$ que es absurdo porque $\gamma_0 \in c$. \square

2.6. Ejercicios

Ejercicio 2.6.1. Sea a un conjunto y sea $r_{\in} = \{\langle x, y \rangle \in a \times a : x \in y\}$.

1. ¿Es cierto que si a es transitivo, entonces r_{\in} es una relación transitiva sobre a ?
2. ¿Es cierto que si r_{\in} es una relación transitiva sobre a , entonces a es transitivo?

Fundamente sus respuestas.

Ejercicio 2.6.2. Probar que para todo conjunto a los siguientes enunciados son equivalentes:

1. a es transitivo.
2. Para todo $b \subseteq a$, $\cup b \subseteq a$.
3. $\mathcal{P}(a)$ es transitivo.
4. $\cup a' = a$.

Ejercicio 2.6.3. Probar que si a es transitivo también lo es $\cup a$. De un ejemplo para mostrar que $\text{Trans}(\cup a)$ no implica $\text{Trans}(a)$.

Ejercicio 2.6.4. Probar que si a es un conjunto tal que todos sus elementos son transitivos, entonces $\cup a$ es transitivo.

Ejercicio 2.6.5. Probar que un conjunto totalmente ordenado (a, \leq) es bien ordenado si y sólo si \leq es un buen orden sobre todas sus secciones iniciales.

Ejercicio 2.6.6. Un conjunto totalmente ordenado es bien ordenado si y sólo si todo subconjunto propio decreciente es una sección inicial.

Ejercicio 2.6.7. Sea a un conjunto de ordinales. Probar que si $a \neq \emptyset$, entonces $\cap a \in a$.

Ejercicio 2.6.8. Un conjunto ordenado (a, \leq) satisface el **Principio de Inducción Transfinita** si todo subconjunto de a con la propiedad (P) del enunciado del Teorema 2.2.1 coincide con a . Esto es, si para todo $b \subset a$, si b satisface (P) , entonces $b = a$. Probar que todo conjunto totalmente ordenado con primer elemento y que satisface el principio de inducción transfinita es bien ordenado.

Ejercicio 2.6.9. Sea (a, \leq) un conjunto bien ordenado tal que a es transitivo y para todo $x \in a$, $x = a_x$. Pruebe que a es un ordinal.

Ejercicio 2.6.10. Sea a un conjunto de ordinales.

1. De ejemplos en los que $\cup a \in a$ y en los que $\cup a \notin a$.
2. Si $a \neq \emptyset$, entonces $\cap a$ el primer elemento de a .

Ejercicio 2.6.11. Sea (a, \leq) un conjunto ordenado y $b \subseteq a$. Se dice que b es **cofinal en a** (respecto al orden \leq) si para todo $x \in a$ existe $y \in b$ tal que $x \leq y$. Sea α un ordinal y $b \subseteq \alpha$.

1. Pruebe que si α es límite, entonces b es cofinal en α (respecto al orden \subseteq) si y sólo si $\cup b = \cup \alpha$.
2. Si $\alpha \neq \emptyset$ y α no es límite, de una condición necesaria y suficiente para que b sea cofinal en α .

Ejercicio 2.6.12. Diremos que una relación r es **bien fundada** sobre un conjunto a si se cumple:

$$\forall x((x \subseteq a) \wedge (x \neq \emptyset)) \rightarrow \exists y((y \in x) \wedge \neg(\exists t(t \in x) \wedge \langle t, y \rangle \in r)). \quad (2.1)$$

Diremos que el y de (2.1) es un elemento r -minimal de x .

Demuestre que:

1. r es bien fundada sobre a si y sólo si no existe una función $f: \omega \rightarrow a$ tal que $\langle f(n), f(n') \rangle \in r$ para todo $n \in \omega$.
2. Un conjunto totalmente ordenado (a, \leq) es bien ordenado si y sólo si $<$ es bien fundada sobre a .
3. La relación vacía \emptyset es bien fundada sobre todo conjunto a y todo $y \in x \subseteq a$ es \emptyset -minimal de x .
4. Si (a, \leq) es un conjunto ordenado finito, entonces $<$ es bien fundada sobre a .
5. Si r es bien fundada sobre a , entonces vale el siguiente principio de inducción, donde φ denota una fórmula con una variable libre:

$$(\forall y \in a (\langle y, x \rangle \in r \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x \in a \varphi(x).$$

