Capítulo 3

El axioma de Sustitución

3.1. Los sistemas Z y ZF

Hasta ahora hemos considerado los siguientes axiomas:

1) Axioma de Extensionalidad,

2) Axioma del conjunto vacío (existencia de un conjunto),

3) Axioma Esquema de Especificación,

4) Axioma del Par,

5) Axioma de la Unión,

6) Axioma del Conjunto Potencia,

7) Axioma del Infinito.

Como estos axiomas fueron introducidos por Zermelo en 1908, se denominan **Axiomas de Zermelo** y la teoría de conjuntos que se puede desarrollar a partir de los mismos se la simboliza con la letra Z.

Como no hay un conjunto que tenga entre sus elementos a todos los ordinales (Paradoja de Burali-Forti), el Axioma de Especificación no puede utilizarse para probar la existencia de conjuntos de ordinales que satisfagan una cierta propiedad.

Por ejemplo, si α es un ordinal. ¿Existe un conjunto a tal que $\alpha \in a$ y $\forall x\ ((x \in a) \to (x' \in a))$? Cuando $\alpha = \emptyset$ este conjunto existe por el Axioma del Infinito. Pero, ¿existe cuando $\alpha = \omega$?

La existencia de este tipo de conjuntos es compatible con nuestra intuición del universo $\mathcal{U}$, y su existencia podría postularse, transformando el Axioma del Infinito en un esquema válido para cada ordinal α y no sólo para $\emptyset$. Pero este tipo de axioma esquema no sería suficiente para otras situaciones que se plantean naturalmente:

Sea $a_0 = \omega$ y pongamos $\omega_0 = \cup a_0 = \omega$. Usando un axioma esquema del tipo indicado, podríamos definir el conjunto $a_1 = \{\omega_0, \omega_0', \omega_0'' \ldots\}$, hacer $w_1 = \cup a_1$. Así siguiendo, para cada $n \in \omega$ podríamos definir un conjunto de ordinales a_n de modo que el primer elemento de $a_{n'}$ fuese $\cup a_n$. Pero un axioma esquema del tipo indicado no nos permitiría asegurar la existencia de un conjunto que tuviese entre sus elementos a todos los conjuntos a_n para $n \in \omega$.

Observemos que todos estos ejemplos son del tipo siguiente:

Hay un conjunto I y para todo $i \in I$ está definido un único conjunto a_i, y quisiéramos encontrar un conjunto a tal que $a_i \in a$ para todo $i \in I$.

En el primer caso $I = \omega$ y $a_n = \alpha^{(n)}$, donde con el exponente (n) estamos indicando tomar n veces el siguiente, y en el segundo, también $I = \omega$ y $a_0 = \omega$ y $a_{n'} = \{\cup a_n, (\cup a_n)', (\cup a_n)'' \ldots\}$.

Más generalmente, supongamos que tenemos una relación funcional sobre un conjunto a (ver página 14). Esto es, tenemos una fórmula con dos variables libres $\varphi(x, y)$ tal que $\forall x \; ((x \in a) \to \exists! y \; \varphi(x, y)$.

De acuerdo con nuestra intuición del universo $\mathcal{U}$, en la misma etapa en que están disponibles los elementos x del conjunto a también deben estar disponibles los conjuntos $F(x)$ determinados por la relación funcional φ, lo que nos permite formar un nuevo conjunto que los tenga por elementos.

Es decir, la clase $\{F(x) : x \in a\}$ debe ser un conjunto. Este es el significado del axioma esquema siguiente, que fue propuesto por Fraenkel (y también por Skolem) en la década de 1920:

Axioma (Esquema) de Sustitución:[1] Sea φ una fórmula entre cuyas variables libres figuran x e y, y sea t una variable que no figura en φ. Entonces el siguiente enunciado es un axioma:

$$\forall z \; \{[\; \forall x \; \forall y \; \forall t \; (x \in z \;\wedge\; \varphi(x, y) \;\wedge\; \varphi(x, y|t)) \to \; y = t \;] \to$$

$$\exists u \; [\forall y \; (\exists x \; (x \in z \;\wedge\; \varphi(x, y))) \;\leftrightarrow\; (y \in u)]\}.$$

Con la notación introducida en la página 12 el Axioma Esquema de Sustitución puede escribirse:

$$\forall z [\forall x ((x \in z) \to (\exists! y (\varphi(x, y))] \to \exists u \; [\forall y \; (\exists x \; (x \in z \;\wedge\; \varphi(x, y))) \;\leftrightarrow\; (y \in u)].$$

Dada una "función" F en $\mathcal{U}$ y un conjunto a, el axioma anterior nos permite construir una función f de a en algún conjunto: en efecto, primero consideramos el conjunto

$$b = \{y : \; \exists x \; (x \in a \;\wedge\; y = F(x))\}$$

cuya existencia asegura el Axioma de Sustitución, luego, el conjunto

$$f = \{r \in a \times b : \; \exists x \; \exists y \; (r = \langle x, y \rangle \;\wedge\; y = F(x))\}.$$

Es sencillo verificar que el conjunto f es efectivamente una función de a en b. Para expresar esta noción escribiremos $f = F|_a$.

[1]Ver página 12 para la notación $\varphi(x, y|t)$.

La teoría de conjuntos desarrollada en base a los siguientes axiomas se conoce como la teoría de Zermelo- Fraenkel, y se la simboliza por ZF:

1) Axioma de Extensionalidad,

2) Axioma del Conjunto Vacío,

3) Axioma Esquema de Sustitución,

4) Axioma de la Unión,

5) Axioma del Conjunto Potencia,

6) Axioma del Infinito.

Tanto el Axioma de Especificación como el Axioma del Par son derivables en ZF:

DERIVACIÓN DEL AXIOMA DE ESPECIFICACIÓN: Sea ψ una fórmula con una única variable libre y sea $\varphi(x,y)$ la fórmula $(x = y \wedge \psi(y))$. Esta fórmula es funcional. En efecto, $\forall x \forall v\ ((\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,y|v)) \to (y = x = v))$. Luego por el Axioma Esquema de Sustitución tenemos que

$$\forall z\ \exists u\ \forall y\ [(y \in u) \leftrightarrow (\exists x\ ((x \in z) \wedge (y = x) \wedge \psi(y)))],$$

que es un enunciado equivalente al Axioma de Especificación.

DERIVACIÓN DEL AXIOMA DEL PAR: Dados los conjuntos u, v la idea es encontrar una fórmula funcional que restringida a un conjunto con dos elementos tenga por imagen al conjunto $\{u, v\}$.

Comencemos por observar que:

1) $\emptyset \neq \mathcal{P}(\emptyset)$,

2) $x \in \mathcal{P}(\emptyset) \leftrightarrow x = \emptyset$,

3) $x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \leftrightarrow (x = \emptyset \vee x = \mathcal{P}(\emptyset))$.

Con estos conjuntos formaremos la fórmula adecuada para aplicar el Esquema de Sustitución.

Sea $\varphi(z,y,u,v)$ la fórmula $(z = \emptyset \wedge y = u) \vee (z = \mathcal{P}(\emptyset) \wedge y = v)$.

Si $z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ y $\varphi(y) \wedge \varphi(y|t)$, entonces $y = t$, por lo tanto φ es funcional en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Por lo tanto,

$$\forall u \forall v[\exists x(y \in x \leftrightarrow (z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) \wedge \varphi(y)], \tag{3.1}$$

que más detalladamente se escribe

$$\forall u \forall v[\exists x(y \in x \leftrightarrow (z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) \wedge (z = \emptyset \wedge y = u) \vee (z = \mathcal{P}(\emptyset) \wedge y = v)].$$

Como cuando $z = \emptyset$, es $y = u$ y cuando $z = \mathcal{P}(\emptyset)$, es $y = v$, resulta que (3.1)) afirma que

$$\forall u \forall v[\exists x(y \in x \leftrightarrow (y = u \vee y = v)]$$

que es el axioma del par.

3.2. Ordinales y conjuntos bien ordenados

DEFINICIONES: Sean a y b conjuntos ordenados. Una función $f : a \to b$ es un **morfismo**, si siempre que x e y estén en a y se cumpla que $x \leq y$, se tenga $f(x) \leq f(y)$; y es un **monomorfismo** si $x \leq y$ si y sólo si $f(x) \leq f(y)$. Si f es un monomorfismo y es sobreyectivo diremos que es un **isomorfismo**. Diremos que a es **similar** a b, y escribiremos $a \sim b$, si existe un isomorfismo de a sobre b.

En la definición anterior hemos cometido un abuso de lenguaje común en matemática: hemos representado con el mismo símbolo $\leq$ el orden en a y en b, entendiendo que del contexto resulta claro a cuál de ellos nos estamos refiriendo. Así si x, y son elementos de a, en $x \leq y$ el orden debe ser el de a, mientras que en $f(x) \leq f(y)$, el orden debe ser el de b. Esta convención permite hacer la escritura (y la lectura!) menos pesada, y será usada habitualmente.

EJEMPLO: Sea a un conjunto totalmente ordenado, y sea $s(a)$ el conjunto de todas las secciones iniciales de a, ordenadas por inclusión. Entonces la función $f : a \to s(a)$ definida por $f(x) = a_x$ para todo $x \in a$ es un isomorfismo. Luego $a \sim s(a)$.

Observaciones 3.2.1. *Sean a y b conjuntos ordenados y $f : a \to b$ un monomorfismo. Entonces:*

(I) *f es una función inyectiva.* (Pero hay morfismos inyectivos que no son monomorfismos, como lo muestra el siguiente ejemplo: $a = \{x, y\}$, con el orden dado por $x \leq y \leftrightarrow x = y$, $b = \{s, t\}$ con el orden dado por $s < t$ y $f : a \to b$, definida por $f(x) = t$, $f(y) = s$.)

(II) *f es un isomorfismo de a sobre $img(f) \subseteq b$.*

(III) *Si f es sobreyectiva (esto, si f es un isomorfismo), entonces para todo $x \in a$ la restricción de f a la sección inicial a_x es un isomorfismo de a_x sobre $b_{f(x)}$.*

La noción de similaridad es debida a Cantor, quién utilizaba la notación $\bar{a} = \bar{b}$ para indicar que $a \sim b$. Con esta notación quería señalar que los conjuntos similares son iguales si hacemos abstracción de la naturaleza de sus elementos pero no del orden en que estos elementos están relacionados. En cambio, con la notación $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$, que utilizamos en el capítulo anterior, quería indicar que los conjuntos son iguales si hacemos abstracción tanto de la naturaleza de sus elementos como del orden entre los mismos. Una raya sobre el conjunto indicaba entonces una abstracción y dos rayas, una doble abstracción.

Como la función identidad es obviamente un isomorfismo, la función inversa de un isomorfismo es un isomorfismo y la composición de isomorfismos es un isomorfismo, resulta que la similaridad tiene las propiedades de una equivalencia: es reflexiva, transitiva y simétrica: Si $a \sim b$, entonces $b \sim a$. La simetría nos permite decir que dos conjuntos ordenados son **similares** cuando existe un isomorfismo de uno sobre el otro. Cantor estudió particularmente la similaridad entre conjuntos bien ordenados, e introdujo los ordinales como "lo que tenían de común los conjuntos bien ordenados similares entre sí". En la teoría axiomática los ordinales son conjuntos especiales. Para ver que sirven para clasificar a los conjuntos bien ordenados, es fundamental el teorema siguiente.

Teorema 3.2.2. *Sean α y β ordinales. Existe un isomorfismo $f : \alpha \to \beta$ si y sólo si $\alpha = \beta$ y en este caso f es la identidad.*

Demostración. Sea f un isomorfismo de α en β. Sea $a = \{\zeta \in \alpha : f(\zeta) \neq \zeta\}$. Supongamos que $a \neq \emptyset$. Como α es bien ordenado, sea γ el primer elemento de a. Si $\zeta \in \gamma$, entonces $\zeta \notin a$ y $\zeta = f(\zeta)$; como f es isomorfismo (recordar que el orden está dado por la pertenencia) $f(\zeta) \in f(\gamma)$, entonces $\zeta \in f(\gamma)$: esto muestra que $\gamma \subseteq f(\gamma)$.

Dado que $\gamma \subseteq f(\gamma)$ y que $\gamma \neq f(\gamma)$, por el Teorema 2.3.4 tenemos que $\gamma \in f(\gamma) \in \beta$, y como β es transitivo, esto implica que $\gamma \in \beta$. Luego por la sobreyectividad de f, existe $\delta \in \alpha$ tal que $f(\delta) = \gamma$.

Existen dos posibilidades: $\delta \in a$ ó $\delta \notin a$. Veremos que ambos casos conllevan a una contradicción. Si $\delta \notin a$, entonces $\delta = f(\delta) = \gamma \in a$, que es absurdo. Si $\delta \in a$, entonces $\gamma \subseteq \delta$, lo que implica $f(\gamma) \subseteq f(\delta) = \gamma$, entonces $f(\gamma) \subseteq \gamma$; como $\gamma \subseteq f(\gamma)$, $\gamma = f(\gamma)$ y esto es absurdo porque $\gamma \in a$. Con esto hemos probado que el conjunto a es vacío y por consiguiente que f es la identidad.

Por ser f la identidad y sobreyectiva, $\forall x(x \in \alpha \leftrightarrow x \in \beta)$, y el axioma de extensionalidad afirma que $\alpha = \beta$. □

En la demostración del siguiente teorema utilizaremos el Axioma Esquema de Sustitución. Veremos más adelante (Teorema 6.1.10) que este teorema no es derivable en Z.

Teorema 3.2.3. *Para todo conjunto bien ordenado a existe un único ordinal γ tal que $a \sim \gamma$.*

Demostración. Sea $\varphi(x, y)$ la fórmula $(Ord(y) \wedge a_x \sim y)$ y sea

$$b = \{x \in a : \exists\beta\varphi(x, \beta)\}.$$

Si $x \in a$ y $\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, v)$, entonces y y v son dos ordinales similares y por el teorema anterior, son iguales. Por lo tanto φ es funcional en a. El Axioma de Sustitución nos dice que existe un conjunto c tal que

$$y \in c \leftrightarrow Ord(y) \wedge \exists x(x \in a \wedge \varphi(x, y).$$

Veamos que c es transitivo: Sea $\alpha \in c$. Existe $x \in a$ y un isomorfismo f de α sobre a_x. Sea $\beta \in \alpha$. Por lo observado en 3.2.1 (III), $\beta = \alpha_\beta \sim a_{f(\beta)}$ y por lo tanto $\beta \in c$. Como c es un conjunto transitivo de ordinales resulta ser un ordinal.

Por otra parte, b es decreciente en a. En efecto, sea x en b e $y \in a$ tal que $y < x$. Existe un ordinal α y un isomorfismo f de a_x sobre α. Como $y \in a_x$,

$f(y) \in \alpha$, luego $f(y)$ es un ordinal y otra vez por lo observado en 3.2.1 (III), $a_y \sim f(y)$, lo que prueba que $y \in b$.

Ahora probaremos que b es similar a c.

Sea $F : b \to c$ dada por $F(x) =$ "el único ordinal similar a a_x". Comprobemos que F es un isomorfismo. Supongamos que x e y están en b y $x < y$. Existe un isomorfismo g de a_y sobre $F(y)$, y la restricción de g a a_x es un isomorfismo de a_x sobre $g(x)$. Por la definición de F, $F(x) = g(x) \in F(y)$. Luego $x < y$ implica $F(x) < F(y)$. Supongamos ahora que α, β están en c y $\beta \in \alpha$. Sean $x, y \in b$ tales que $\alpha = F(x)$ y $\beta = F(y)$. Si fuese $x \leq y$, sería $F(x) \leq F(y)$, esto es, tendríamos $\beta \in \alpha \subseteq \beta$, lo que es absurdo. Luego debe ser $y < x$. Como F es sobreyectiva, hemos probado que F es un isomorfismo y $b \sim c$.

Finalmente, como $b \sim c$, si existiese x en a tal que $b = a_x$, resultaría $a_x \sim c$, y por lo tanto $c \in c$ que es absurdo. Luego b no puede ser una sección inicial y como es decreciente, debe ser $b = a$, y la demostración se completa tomando $\gamma = c$. □

3.3. Definición por Recurrencia

Queremos ahora generalizar el Principio de Definición por Inducción a un **Principio de Definición por Recurrencia** sobre los ordinales.

En el caso de los números naturales, se puede definir una función u cuyo valor en $n \in \omega$ depende, por medio de una función prefijada f, de los valores que u toma en el segmento inicial ω_n. Vamos a generalizar esta idea del modo siguiente:

Supongamos que tenemos una relación funcional $\varphi(x, y)$ (ver página 14). Esto nos permite considerar una "función" $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ del universo en el universo, donde $F(x) = y \leftrightarrow \varphi(x, y)$. Si Ord es la clase de los ordinales, queremos ver que existe una " función" $T : Ord \to \mathcal{U}$ tal que para todo ordinal α, $T(\alpha) = F(T|_\alpha)$, donde $T|_\alpha = \{\langle \beta, T(\beta)\rangle : \beta \in \alpha\}$. Observemos que como α es un conjunto, por el axioma de sustitución resulta que $T|_\alpha$ es un conjunto. Más precisamente, es una función con dominio α: $T|_\alpha \colon \alpha \to \{T(\beta) : \beta \in \alpha\}$.

Las propiedades siguientes deben entenderse relativas a la relación funcional F, que supondremos fija.

Definición: Sea α un ordinal. Diremos que una función f es una α-función si $dom(f) = \alpha$ y $f(\beta) = F(f|_\beta)$ para todo $\beta \in \alpha$.

Si $\beta \in \alpha$ y f es una α-función, entonces $f|_\beta$ es una β-función. En efecto, para $\gamma \in \beta$, $(f|_\beta)|_\gamma = f|_\gamma$.

Lema 3.3.1. *Para cada α existe a lo sumo una α-función.*

Demostración. Sean f y g dos α-funciones. Por definición, $dom(f) = dom(g) = \alpha$. Supongamos que existe un ordinal en α para el cual las funciones toman distintos valores, sea γ el primero para el cual esto ocurre. Como γ es el primero, si $\beta \in \gamma$ entonces $f(\beta) = g(\beta)$, por lo tanto $f|_\gamma = g|_\gamma$. Como f y g son α-funciones, y $\gamma \in \alpha$ tenemos que $f(\gamma) = F(f|_\gamma) = F(g|_\gamma) = g(\gamma)$: absurdo porque habíamos supuesto que $f(\gamma) \neq g(\gamma)$. □

Dada la unicidad de estas funciones para cada ordinal, podemos establecer la fórmula funcional dada por

$$T(x) = \begin{cases} F(f) & \text{si } x = \alpha \text{ es un ordinal y } f \text{ una } \alpha\text{-función} \\ \emptyset & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Lema 3.3.2. *Si existe una α-función f, entonces $T(\alpha) = F(T|_\alpha)$*

Demostración. Sabemos que si $\beta \in \alpha$, entonces $f|_\beta$ es una β-función. Por lo tanto $f(\beta) = F(f|_\beta) = T(\beta)$. Esto muestra que $T|_\alpha = f|_\alpha = f$ y por consiguiente que $T(\alpha) = F(f) = F(T|_\alpha)$. □

Si para todo α existe una α-función, habremos probado el Principio de Definición por Recurrencia.

Lema 3.3.3. *Para todo ordinal α existe una α-función.*

Demostración. Supongamos que para cada $\beta \in \alpha$ existe una β-función. Entonces por el Lema 3.3.2 tendremos que $T(\beta) = F(T|_\beta)$ para todo $\beta \in \alpha$. Sea $f = T|_\alpha$. Como $dom(f) = \alpha$ y para todo $\beta \in \alpha$ tenemos $f(\beta) = F(T|_\beta) = F(f|_\beta)$, resulta que f es una α-función.

Si $\varphi(x) = Ord(x) \wedge (\exists f\ x\text{-}función)$, hemos probado que

$$\forall\alpha(\forall\beta(\beta \in \alpha \wedge \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)).$$

Luego por inducción en los ordinales tenemos que $\forall\alpha\varphi(\alpha)$, es decir, para todo α existe una (única) α-función. □

Hemos completado así la demostración de la existencia de la relación funcional T tal que para todo ordinal α, $T(\alpha) = F(T|_\alpha)$, y por lo tanto, la demostración del Principio de Definición por Recurrencia.

Ahora veremos una reformulación que resulta útil en algunas aplicaciones.

Teorema 3.3.4. *Si a_0 es un conjunto y F_1 y F_2 son "funciones", entonces existe una "función" T tal que para todo ordinal α se satisface*

$$T(\alpha) = \begin{cases} a_0 & \textit{si } \alpha = \emptyset \\ F_1(T|_{\beta'}) & \textit{si } \alpha = \beta' \\ F_2(T|_\alpha) & \textit{si } \alpha \textit{ es ordinal límite.} \end{cases}$$

Demostración. Definamos la "función" $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ del modo siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } x = \emptyset, \\ F_1(x) & \text{si } \exists\beta(Ord(\beta) \wedge x \text{ es función } \wedge dom(x) = \beta'), \\ F_2(x) & \text{si } \exists\alpha\ (\alpha \text{ ordinal límite } \wedge x \text{ es función } \wedge dom(x) = \alpha), \\ \emptyset & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Por el Principio de Definición por Recurrencia existe una "función" T tal que $T(\alpha) = F(T|_\alpha)$, esto es, $T(0) = F(T|_0) = a_0$, $T(\beta') = F(T|_{\beta'}) = F_1(T|_{\beta'})$ y si α es un ordinal límite, $T(\alpha) = F(T|_\alpha) = F_2(T|_\alpha)$. □

El siguiente corolario es un primer ejemplo de aplicación de la definición por recurrencia, en la que intervienen sólo los ordinales $\leq \omega$. En capítulos posteriores veremos aplicaciones más sofisticadas-

Corolario 3.3.5. *Dado un conjunto a existe una función T_a con $dom(T_a) = \omega'$ tal que*

1. $T_a(\emptyset) = a$,
2. $T_a(n') = \cup T_a(n)$ *si* $n \in \omega$,
3. $T_a(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} T_a(n)$.

Demostración. Consideremos $a_0 = a$,

$$F_1(x) = \begin{cases} \cup x(\beta) & \text{si } x \text{ es función } \wedge\ dom(x) = \beta', \\ \emptyset & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

y $F_2(x) = \cup img(x)$. El teorema anterior nos garantiza que existe una función T_a tal que $T_a(0) = a$, $T_a(n') = F_1(T_a|_{n'}) = \cup T_a(n)$ y $T_a(\omega) = F_2(T_a|_\omega) = \cup\{T_a(n) : n \in \omega\}$. □

$T_a(\omega)$ se llama **clausura transitiva** de a. Este nombre se lo debe a que es el menor conjunto transitivo que contiene a a, esto es:

Teorema 3.3.6. *Para todo conjunto a, $T_a(\omega)$ satisface:*

i) $a \subseteq T_a(\omega)$,

ii) $Trans(T_a(\omega))$ *y*

iii) *si* $a \subseteq b$ *y* $Trans(b)$, *entonces* $T_a(\omega) \subseteq b$.

Demostración. $a = T_a(0) \subseteq \cup\{T_a(n) : n \in \omega\}$, lo que prueba *i)*.

Si $x \in T_a(\omega)$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \in T_a(n_0)$, luego $x \subseteq \cup T_a(n_0) = T_a(n_0') \subseteq T_a(\omega)$. Por lo tanto $T_a(\omega)$ es transitivo.

Para probar *iii)* vemos que $T_a(0) = a \subseteq b$; y si $T_a(n) \subseteq b$, entonces $T_a(n') = \cup T_a(n) \subseteq \cup b = b$ (La última igualdad vale porque b es transitivo). Por lo tanto el conjunto de los $n \in \omega$ tal que $T_a(n) \subseteq b$ es inductivo, luego igual a ω. Por lo tanto, $T_a(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} T_a(n) \subseteq b$. □

3.4. Suma de ordinales

Siguiendo la costumbre, el conjunto vacío, considerado como ordinal, será denotado por 0, $0'$ por 1 y $1' = 0''$ por 2 (ver lo dicho a continuación del Teorema 2.1.5, en la página 25).

DEFINICIÓN: Sean (a, r) y (b, s) conjuntos ordenados, con $a \cap b = \emptyset$. Llamaremos **suma ordinal** de a y b, y lo denotaremos $a \sqcup b$, al conjunto ordenado

$$(a \cup b, r \cup s \cup (a \times b)).$$

Esto es, $x \leq y$ en $a \sqcup b$ si y sólo si se satisface una de las tres condiciones siguientes, que son mutuamente excluyentes:

I) x e y pertenecen ambos a a y $\langle x, y \rangle \in r$,

II) x e y están ambos en b y $\langle x, y \rangle \in s$,

III) $x \in a$ e $y \in b$.

La demostración del lema siguiente es muy fácil y la dejamos a cargo del lector.

Lema 3.4.1. *Si a y b son conjuntos bien ordenados tales que $a \cap b = \emptyset$, entonces $a \sqcup b$ es bien ordenado y a es un subconjunto decreciente de $a \sqcup b$.* □

Notemos que si α es un ordinal y x un conjunto, el conjunto $\alpha \times \{x\}$ resulta bien ordenado por la relación $(\zeta, x) \leq (\eta, x)$ si y sólo si $\zeta \leq \eta$, donde ζ y η son elementos de α, y es claro que la correspondencia $\zeta \mapsto (\zeta, x)$ establece un isomorfismo entre α y $\alpha \times \{x\}$. Luego, dados los ordinales α y β, los conjuntos $\alpha \times \{0\}$ y $\beta \times \{1\}$ son conjuntos bien ordenados y disjuntos, isomorfos a α y a β respectivamente.

DEFINICIÓN: Dados los ordinales α y β se llama **suma** de α y β y se lo simboliza $\alpha \oplus \beta$, al único ordinal isomorfo a la suma ordinal $\alpha \times \{0\} \ \sqcup \ \beta \times \{1\}$, cuya existencia está garantizada por el Lema 3.4.1 y por el Teorema 3.2.3.

Observemos que si a y b son conjuntos bien ordenados y disjuntos, con $a \sim \alpha$ y $b \sim \beta$, entonces $a \sqcup b \ \sim \ \alpha \times \{0\} \ \sqcup \ \beta \times \{1\}$. Por lo tanto $\alpha \oplus \beta$ es el ordinal isomorfo a la suma ordinal de cualquier par de conjuntos bien ordenados y disjuntos e isomorfos a los ordinales α y β respectivamente.

Teorema 3.4.2. *La suma de ordinales goza de las siguientes propiedades, donde α, β y γ denotan ordinales arbitrarios:*

I) *El 0 es el elemento neutro:* $0 \oplus \alpha = \alpha \oplus 0 = \alpha$.

II) *Es asociativa:* $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$.

III) $\alpha \oplus 1 = \alpha'$

IV) $\alpha \oplus \beta' = (\alpha \oplus \beta)'$.

Demostración. I) resulta del hecho que

$$0 \times \{0\} \sqcup \alpha \times \{1\} = \emptyset \sqcup \alpha \times \{1\} \sim \alpha \sim \alpha \times \{0\} \sqcup \emptyset = \alpha \times \{0\} \sqcup \emptyset \times \{0\}.$$

II) se puede probar observando que si a, b y c son conjuntos bien ordenados y disjuntos dos a dos, la aplicación $\langle x, \langle y, z\rangle\rangle \mapsto \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$ establece un isomorfismo de $a \sqcup (b \sqcup c)$ sobre $(a \sqcup b) \sqcup c$.

III) La función $f : \alpha' \mapsto (\alpha\times\{0\}) \sqcup (1\times\{1\})$ definida por: $f(\zeta) = \begin{cases} (\zeta, 0) & \text{si } \zeta \in \alpha \\ (0, 1) & \text{si } \zeta = \alpha \end{cases}$ es un isomorfismo.

IV) Por *ii)* y *iii)*: $\alpha \oplus \beta' = \alpha \oplus (\beta \oplus 1) = (\alpha \oplus \beta) \oplus 1 = (\alpha \oplus \beta)'$.

□

Observación 3.4.3. *La suma de ordinales no es conmutativa.* Por ejemplo, la función $f : 1 \times \{0\} \sqcup \omega \times \{1\} \mapsto \omega$ definida por $f((0, 0)) = 0$ y $f((n, 1)) = n'$ es un isomorfismo, lo que muestra que $1 \oplus \omega = \omega$, mientras que por *iii)* del lema anterior, $\omega \oplus 1 = \omega' \neq \omega$. Este ejemplo muestra algo más: *no vale la propiedad cancelativa a derecha,* puesto que $0 \oplus \omega = 1 \oplus \omega = \omega$ pero $0 \neq 1$.

Sean α y β ordinales tales que $\alpha \in \beta$. Entonces $\beta \setminus \alpha$ es un conjunto bien ordenado (por ser un subconjunto del conjunto bien ordenado β), pero no transitivo. Por el Teorema 3.2.3 existe un único ordinal isomorfo a $\beta \setminus \alpha$ que será denotado por $\beta \ominus \alpha$. Pondremos también que $\beta \ominus \beta = 0$.

Teorema 3.4.4. *Sean α, β y γ ordinales.*

I) *Si $\alpha \in \beta$, entonces $\beta = \alpha \oplus (\beta \ominus \alpha)$*

II) *Si $\beta \in \gamma$, entonces $\alpha \oplus \beta \in \alpha \oplus \gamma$ (monotonía a derecha)*

III) *Si $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma$, entonces $\beta = \gamma$ (propiedad cancelativa a izquierda).*

Demostración. I) La función $f : \beta \to \alpha \times \{0\} \sqcup (\beta \setminus \alpha) \times \{1\}$ definida por: $f(\zeta) = \begin{cases} (\zeta, 0) & \text{si } \zeta \in \alpha \\ (\zeta, 1) & \text{si } \zeta \in \beta \setminus \alpha \end{cases}$ es un isomorfismo.

II) Si $\beta \in \gamma$, por *i)* tendremos que $\gamma = \beta \oplus (\gamma \ominus \beta)$. Luego usando la propiedad asociativa tendremos: $\alpha \oplus \gamma = (\alpha \oplus \beta) \oplus (\gamma \ominus \beta)$ y como $\gamma \ominus \beta \neq 0$, teniendo en cuenta el Lema 3.4.1 resulta que $\alpha \oplus \beta \in \alpha \oplus \gamma$.

III) Si $\alpha \oplus \gamma = \alpha \oplus \beta$, por *ii)* y el Teorema 2.3.4 debe ser $\beta = \gamma$.

□

Teorema 3.4.5. *Si m y n son números naturales, entonces:*

I) *$m \oplus n \in \omega$ y*

II) *$m \oplus n = n \oplus m$.*

Demostración. I) Sea $m \in \omega$ y $a_m = \{n \in \omega : m \oplus n \in \omega\}$. Veamos que a_m es inductivo: $0 \in a_m$, pues $m \oplus 0 = m \in \omega$. Supongamos que $n \in a_m$. Entonces $m \oplus n \in \omega$, y $m \oplus n' = (m \oplus n)' \in \omega$.

II) Es fácil verificar que $\overline{\overline{m \times \{0\} \sqcup n \times \{1\}}} = \overline{\overline{n \times \{0\} \sqcup m \times \{1\}}}$, luego $\overline{\overline{m \oplus n}} = \overline{\overline{n \oplus m}}$, y como por *i)* $m \oplus n$ y $n \oplus m$ son ordinales finitos, por (ii) en el Teorema 2.4.6 debemos tener que $m \oplus n = n \oplus m$.

□

Observación 3.4.6. G. Peano demostró que la suma de números naturales es la única función de $\omega \times \omega \mapsto \omega$ que satisface las ecuaciones: $m + 0 = m$ y $m + n' = (m + n)'$. De los teoremas 3.4.2 parte *(iv)* y 3.4.5 *(i)* resulta entonces que $m \oplus n$ coincide con la suma ordinaria de números naturales, y por ende que la suma de ordinales es una generalización de la suma de naturales.

La noción de suma ordinal de dos conjuntos ordenados puede extenderse a familias de conjuntos ordenados indexados por un conjunto bien ordenado:

DEFINICIÓN: Sea I un conjunto bien ordenado y para cada $i \in I$ sea (a_i, r_i) un conjunto ordenado, tal que $a_i \cap a_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Llamaremos **suma ordinal de una familia** $\{a_i\}_{i \in I}$ al conjunto ordenado

$$\bigsqcup_{i \in I} a_i = (\bigcup_{i \in I} a_i, \bigcup_{i \in I} r_i \cup \bigcup_{i < j} (a_i \times a_j)).$$

De acuerdo con esta definición, $x \leq y$ en $\bigsqcup_{i \in I} a_i$ si y sólo si se presenta uno (y sólo uno) de los casos siguientes:

1. Existe $i \in I$ tal que $x \in a_i$, $y \in a_i$ y $\langle x, y \rangle \in r_i$, ó

2. Existen i y j en I tales que $i < j$, $x \in a_i$ e $y \in a_j$.

Notemos todavía que la suma ordinal $a \sqcup b$ definida al principio de la sección coincide con la suma ordinal de la familia $\{a_i\}_{i \in 2}$ donde $a_0 = a$ y $a_1 = b$: $a \sqcup b = \bigsqcup_{i \in 2} a_i$.

Se prueba fácilmente que si los a_i son conjuntos bien ordenados para todo $i \in I$ y disjuntos dos a dos, entonces $\bigsqcup_{i \in I} a_i$ resulta ser bien ordenado.

Sea β un ordinal y $\{\alpha_\zeta\}_{\zeta \in \beta}$ una familia de ordinales. La suma ordinal $\bigsqcup_{\zeta \in \beta} (\alpha_\zeta \times \{\zeta\})$ es un conjunto bien ordenado.

DEFINICIÓN: Llamaremos **suma de una familia ordinales** de una familia $\{\alpha_\zeta\}_{\zeta \in \beta}$ al único ordinal isomorfo a $\bigsqcup_{\zeta \in \beta} (\alpha_\zeta \times \{\zeta\})$, que denotaremos $\bigoplus_{\zeta \in \beta} \alpha_\zeta$.

La existencia está garantizada por el Teorema 3.2.3.

Estas "series" de ordinales nos permitirán definir una operación de producto de ordinales, como veremos en la sección siguiente.

3.5. Producto de ordinales

DEFINICIÓN: Llamaremos **producto** de los ordinales α y β, y lo denotaremos $\alpha \odot \beta$, al ordinal $\bigoplus_{\zeta\in\beta} \alpha_\zeta$, donde $\alpha_\zeta = \alpha$ para todo $\zeta \in \beta$.

EJEMPLO: $2 \odot \omega \sim \bigsqcup_{n\in\omega} 2 \times \{n\}$. Este conjunto puede listarse de la manera siguiente: $(0,0) < (1,0) < \cdots < (0,n) < (1,n) < \cdots$ y es obvio que $2 \odot \omega \sim \omega$. Precisamente, puede verse que la función $f : \bigsqcup_{n\in\omega} 2 \times \{n\} \mapsto \omega$ definida por $f((i,n)) = 2n + i$, $i \in 2$, es un isomorfismo.

Por otra parte, $\omega \odot 2 = \omega \oplus \omega$. En particular, vemos que el producto de ordinales no es conmutarivo. Como $(1 \oplus 1) \odot \omega = 2 \odot \omega = \omega \in \omega \oplus \omega = (1 \odot \omega) \oplus (1 \odot \omega)$, vemos que tampoco vale la distributiva a derecha del producto respecto a la suma.

La demostración de las propiedades listadas en el teorema siguiente es sencilla y la dejamos a cargo del lector.

Teorema 3.5.1. *Si α, β y γ son ordinales, se tiene que:*

I*)* $0 \odot \alpha = \alpha \odot 0 = 0$

II*)* $1 \odot \alpha = \alpha \odot 1 = \alpha$

III*)* $\alpha \odot (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$

IV*) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 1$, entonces $\alpha \in \alpha \odot \beta$*

V*) Si $\alpha > 0$ y $\alpha \odot \beta = \alpha \odot \gamma$, entonces $\beta = \gamma$*

VI*)* $\alpha \odot \beta' = (\alpha \odot \beta) \oplus \alpha$

□

Observación 3.5.2. Se verifica fácilmente que $\bigsqcup_{\zeta\in\beta}(\alpha \times \{\zeta\}) = \alpha \times \beta$, y el orden definido en $\alpha \times \beta$ es el llamado **orden lexicográfico inverso**: dados (γ, ζ) y (δ, η) pertenecientes a $\alpha \times \beta$, $(\gamma, \zeta) < (\delta, \eta)$ si y sólo si se cumple una de las dos condiciones siguientes: 1) $\zeta < \eta$ ó 2) $\zeta = \eta$ y $\gamma < \delta$.

La demostración del siguiente teorema es análoga a la del teorema 3.4.5, y se puede hacer teniendo en cuenta las propiedades indicadas en *i)* y *vii)* del teorema 3.5.1 y la observación anterior.

Teorema 3.5.3. *Si m y b son números naturales, entonces:*

I*)* $m \odot n \in \omega$

II*)* $\overline{\overline{m \odot n}} = \overline{\overline{m \times n}}$

III*)* $m \odot n = n \odot m$

□

Observación 3.5.4. G. Peano demostró que el producto de números naturales es la única función de $\omega \times \omega \mapsto \omega$ que satisface l as ecuaciones $m \cdot 0 = 0$ y $m \cdot n' = (m \cdot n) + m$. De los teoremas 3.5.1 *(vii)* y 3.5.3 resulta entonces, teniendo en cuenta la Observación hecha luego del Teorema 3.4.5 sobre la suma de naturales, que $m \odot n$ con el producto ordinario de números naturales, y por ende que el producto de ordinales es una generalización del producto de números naturales.

3.6. Ejercicios

Ejercicio 3.6.1. *Sea α un ordinal y β un ordinal límite. Pruebe que:*

1. $\alpha \oplus \beta = \bigcup_{\xi\in\beta}(\alpha \oplus \xi)$.
2. $\alpha \odot \beta = \bigcup_{\xi\in\beta}(\alpha \odot \xi)$.

Los cuatro ejercicios siguientes muestran como la suma y producto de ordinales pueden también ser definidas por recursión, aunque las definiciones directas dadas en el texto son más intuitiva y hacen que las propiedades de ambas operaciones resulten más aparentes.

Ejercicio 3.6.2. *Sea α un ordinal. Demuestre que la clase*

$$S_\alpha = \{\langle\beta, \gamma\rangle : \gamma = \alpha \oplus \beta\}$$

es funcional y que es la única "función" de la clase de los ordinales en sí misma que satisface las siguientes propiedades:

a) $S(0) = \alpha$,

b) $S(\beta') = F(\beta)'$,

c) $S(\beta) = \bigcup_{\xi\in\beta} S(\xi)$ *si* β *es límite.*

Ejercicio 3.6.3. *Para cada ordinal α sea "$G_\alpha\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$" definida para todo x por*

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0, \\ (x(\beta))' & \text{si } x \text{ es función y } dom(x) = \beta', \\ \bigcup_{\xi\in\beta} x(\xi) & \text{si } x \text{ es función y } dom(x) = \beta \text{ y } \beta \text{ es ordinal límite,} \\ \emptyset & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Aplique la definición por recurrencia para demostrar la existencia de una "$F_\alpha\colon Ord \to Ord$" satisfaciendo las propiedades $a), b)$ y $c)$ del ejercicio anterior.

Ejercicio 3.6.4. *Sea α un ordinal. Demuestre que la clase*

$$P_\alpha = \{\langle\beta, \gamma\rangle : \gamma = \alpha \odot \beta\}$$

es funcional y que es la única "función" de la clase de los ordinales en sí misma que satisface las siguientes propiedades:

a) $P(0) = 0$,

b) $P(\beta') = P(\beta) \oplus \beta$,

c) $P(\beta) = \bigcup_{\xi\in\beta} P(\xi)$ *si* β *es límite.*

Ejercicio 3.6.5. *Para cada ordinal* α *sea "*$H_\alpha\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$*" definida para todo* x *por*

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} (x(\beta)) \oplus \alpha & \text{si } x \text{ es función y } dom(x) = \beta' \text{ e } img(x) \subset Ord, \\ \bigcup_{\xi\in\beta} x(\xi) & \text{si } x \text{ es función y } dom(x) = \beta \text{ y } \beta \text{ es ordinal límite}, \\ \emptyset & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Aplique la definición por recurrencia para demostrar la existencia de una "$G_\alpha\colon Ord \to Ord$*" satisfaciendo las propiedades* $a), b)$ *y* $c)$ *del ejercicio anterior.*

Ejercicio 3.6.6. *Demuestre que para cada ordinal* α *existe una única "función "*$E_\alpha\colon Ord \to Ord$ *satisfaciendo las propiedades:*

a) $E_\alpha(0) = 1$,

b) $E_\alpha(\beta') = E_\alpha(\beta) \odot \alpha$,

c) $E_\alpha(\beta) = \bigcup_{\xi\in\beta} E_\alpha(\xi)$ *si* β *es límite.*

Esta operación es la exponenciación *de ordinales y se escribe* $E_\alpha(\beta) = \alpha^\beta$.

Ejercicio 3.6.7. *Sean* α, β, γ *ordinales. Demuestre que:*

1. $\alpha^\beta \odot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta\oplus\gamma}$,
2. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\odot\gamma}$.

Ejercicio 3.6.8. *Demuestre que:*

1. *Si* $m, n \in \omega$, *entonces* $m^n \in \omega$,
2. $2^\omega = \omega$.