Capítulo 4

El Axioma de Elección

4.1. Cardinalidad o cantidad de elementos

DEFINICIÓN: Dados dos conjuntos a y b diremos que **el cardinal de a es menor que el cardinal de b** o que **el número de elementos de a es menor que el de b**, y escribiremos $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$, si y sólo si existe una función inyectiva de a en b.

Como la función identidad es inyectiva y la composición de funciones inyectivas es inyectiva, resultan inmediatamente las dos propiedades siguientes:

I) Para todo conjunto a es $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{a}}$.

II) Si $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ y $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{c}}$, entonces $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{c}}$.

¿ Qué ocurre en el caso de que $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ y $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}$?

Para responder a esta pregunta, observemos que $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ significa que existe una función inyectiva $f : a \to b$, y $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}$ que existe una inyección $g : b \to a$, y en principio no hay relación alguna entre f y g.

Un teorema famoso, conocido como teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, afirma que la existencia de tales funciones inyectivas implica que existe una función biyectiva de a sobre b. O sea que $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ y $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}$ implican que $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$.

Este es un resultado nada trivial, y hay varias demostraciones del mismo. La que daremos se debe a B. Knaster y A. Tarski (1928), y se basa en el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Sea a un conjunto y $k : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(a)$ una función que preserva la relación de inclusión: si $y \subseteq a$, y $x \subseteq y$, entonces $k(x) \subseteq k(y)$. En estas condiciones, existe $z \in \mathcal{P}(a)$ tal que $k(z) = z$. Esto es, la función k tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $c = \{x \in \mathcal{P}(a) : x \subseteq k(x)\}$ y sea $z = \cup c = \bigcup_{x\in c} x$. Vamos a probar que z es el elemento fijo de k, esto es, que $k(z) = z$. En primer lugar, como k preserva la inclusión, y $x \subseteq z$ para todo $x \in c$, tendremos que $x \subseteq k(x) \subseteq k(z)$, de donde resulta que $z = \bigcup_{x\in c} x \subseteq k(z)$. Para probar que también $k(z) \subseteq z$, basta observar que $z \subseteq k(z)$ implica que $k(z) \subseteq k(k(z))$, o sea, que $k(z) \in c$, y por lo tanto debe ser $k(z) \subseteq \cup c = z$. □

Teorema 4.1.2 (Cantor-Bernstein-Schröder)**.** *Si existe una función inyectiva de a en b y existe una función inyectiva de b en a, entonces existe una función biyectiva de a sobre b.*

Demostración. Sean $f : a \to b$ y $g : b \to a$ funciones inyectivas, y definamos $k : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(a)$ del siguiente modo: para todo $c \subseteq a$, $k(c) = a \setminus g^{\to}(b \setminus f^{\to}(c))$. Es fácil verificar que k es realmente una función y que además preserva la relación de inclusión. Luego, por el lema de Knaster-Tarski existe $d \subseteq a$ tal que $k(d) = d = a \setminus g^{\to}(b \setminus f^{\to}(d))$, lo que también puede escribirse $a \setminus d = g^{\to}(b \setminus f^{\to}(d))$. Entonces si definimos

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in d, \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in a \setminus d, \end{cases}$$

es fácil verificar que h es una función biyectiva de a sobre b. □

Si f es una función inyectiva, entonces $img(f) \subseteq b$ y $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{img(f)}}$. Luego, decir que $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{b}}$ equivale a decir que a tiene el mismo cardinal que un subconjunto de b. En este sentido, $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{b}}$ expresa intuitivamente que a no puede tener "más elementos" que b.

Una propiedad que parece natural de acuerdo con esta interpretación es que los números de elementos de dos conjuntos deben ser siempre comparables: dados a y b, $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{b}}$ o $\overline{\overline{b}} \leq \overline{\overline{a}}$.

Esta propiedad no puede probarse a partir de los axiomas que hemos visto hasta ahora, y debe postularse como un nuevo axioma. En realidad, es una de las formas del llamado Axioma de Elección. Para comprender el significado de este postulado de comparabilidad de cardinales necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.1.3 (Hartogs)**.** *Dado un conjunto a existe un ordinal α tal que $\overline{\overline{\alpha}} \not\leq \overline{\overline{a}}$.*

Demostración. Sea

$$F = \{(c, <) \in \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a \times a) : < \text{ es buen orden sobre } c\},$$

esto es, F es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de a con sus posibles relaciones de buen orden.

Sea $\alpha_{(c,<)}$ el único ordinal isomorfo a $(c, <) \in F$, cuya existencia está garantizada por el Teorema 3.2.3. Es claro que la correspondencia $c \mapsto \alpha_{(c,<)}$ asocia un único ordinal a cada elemento del conjunto F, y por el Axioma de Sustitución sabemos que existe el conjunto $\phi = \{\alpha_{(c,<)} : (c, <) \in F\}$. Veamos que el conjunto de ordinales ϕ es transitivo: Sea $\alpha \in \phi$ y $\beta \in \alpha$. Existe $(x, <) \in F$ y un isomorfismo f de α sobre $(x, <)$. Luego si f_1 es la restricción de f a $\beta \subset \alpha$, resulta que f_1 es un isomorfismo de β sobre sobre la sección inicial $(f(\beta), <)$ de $(x, <)$. Entonces $\beta = \alpha_{(f(\beta),<)} \in F$.

Como ϕ es un conjunto transitivo de ordinales, es un ordinal (Teorema 2.3.6). Veamos que $\overline{\overline{\phi}} \not\leq \overline{\overline{a}}$. Supongamos que existiese una inyección $h : \phi \to a$. Entonces definiendo $x < y$ si y sólo si $x = h(\alpha)$ e $y = h(\beta)$ con $\alpha \in \beta \in \phi$ tendríamos una relación de buen orden $<$ sobre $c = h(\phi) \subseteq a$, y sería $\phi = \alpha_{(c,<)} \in \phi$, lo que es absurdo por el Teorema 2.3.3. □

4.2. Buena Ordenación y Axioma de Elección

Teorema 4.2.1. *En ZF los siguientes enunciados son equivalentes:*

I) *Dados los conjuntos a y b, se tiene que $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{b}}$ o $\overline{\overline{b}} \leq \overline{\overline{a}}$.*

II) *Todo conjunto admite un buen orden.*

III) *Para todo conjunto a existe un ordinal α tal que $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\alpha}}$.*

Demostración. i) implica *ii)*: Supongamos que vale *i)* y sea a un conjunto. Por el Lema 4.1.3, existe un ordinal α tal que $\overline{\overline{\alpha}} \not\leq \overline{\overline{a}}$, luego por *i)* debe ser $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$, esto es, existe $f : a \to \alpha$ inyectiva. La imagen de f es un conjunto de ordinales, y por lo tanto bien ordenado. Luego f es una biyección entre a y el conjunto bien ordenado $img(f)$, y la relación $x < y$ en a si y sólo si $f(x) < f(y)$ en $img(f)$ define una relación de buen orden sobre a.

ii) implica *iii)* Supongamos *ii)* verdadera y sea a un conjunto. Por *ii)* existe una relación de buen orden $\leq$ sobre a, y por el Teorema 3.2.3 existe α similar a $(a, \leq)$. Como todo isomorfismo es una biyección, resulta $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\alpha}}$.

iii) implica *i)*: Supongamos que valga *iii)* y sean a y b conjuntos. Entonces existen ordinales α y β tales que $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{a}}$ y $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{b}}$, dado que $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$ (ver Observación 2.3.5), se deduce inmediatamente que existe una función inyectiva de a en b o una de b en a. □

El enunciado *ii)* del teorema anterior suele expresarse informalmente diciendo que "todo conjunto puede ser bien ordenado" y se lo conoce como **Principio de Buena Ordenación**.

El enunciado *iii)* del mismo teorema implica que dado un conjunto $a \neq \emptyset$, existe (por lo menos) un ordinal α tal que los elementos de a pueden representarse como los términos de una "sucesión transfinita": $a = \{x_\beta\}_{\beta\in\alpha}$. Basta definir $x_\beta = f(\beta)$, donde $f : \alpha \to a$ es una biyección que existe por *iii)*.

Vamos a estudiar ahora varias formas equivalentes del principio de Buena Ordenación.

Comenzaremos por enunciar el llamado Axioma de Elección.

AC) **Axioma de Elección:** *Sea a un conjunto no vacío cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Existe un conjunto d tal que $d \cap b$ es un conjunto unitario para todo b de a.*

En símbolos:

$$\forall z\{\{z \neq \emptyset \wedge [\forall x\ (x \in z) \to (x \neq \emptyset)] \wedge [\forall x \forall y\ (x \in z \wedge y \in z)$$

$$\to ((x \cap y = \emptyset) \vee (x = y))\} \to \exists w\ [\forall x\ (x \in z\ \to\ \exists t\ (x \cap w = \{t\}))]\}.$$

Observemos que este nueva axioma es compatible con nuestra intuición del universo $\mathcal{U}$: Al tener el conjunto a, también tendremos disponibles a los elementos de los elementos de a para formar nuevos conjuntos.

Teorema 4.2.2. *En Z, el Principio de Buena Ordenación implica el Axioma de Elección.*

Demostración. Sea a un conjunto en las condiciones del enunciado del axioma de elección y sea $u = \cup a$. Por el Principio de Buena Ordenación, existe una relación de buen orden r sobre el conjunto u. Luego podemos formar el conjunto d formado por los primeros elementos de los conjuntos no vacíos de a:

$$d = \{x \in u : \exists\ b \in a[(x \in b) \wedge \forall y((y \in b) \to (\langle x, y\rangle \in r))]\}.$$

Por el Axioma de Especificación podemos afirmar la existencia del conjunto d. Como $b \in a$ implica que $b \subseteq u$ y $b \neq \emptyset$, se tiene que $d \cap b \neq \emptyset$, y como los elementos de a son disjuntos dos a dos, debe ser $d \cap b$ un conjunto unitario para todo $b \in a$. □

Observación 4.2.3. Sea a un conjunto no vacío cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, y sea d el conjunto cuya existencia afirma el Axioma de Elección. Por el axioma de especificación podemos formar el conjunto $\{x \in d : \exists b\ (b \in a \wedge b \cap a = \{x\}\}$, esto es, existe un conjunto formado por exactamente un elemento de cada b de a.

Es importante destacar el carácter puramente existencial del Axioma de Elección, pues a pesar de su nombre, no nos da ninguna regla para "elegir" un elemento de cada conjunto de la familia. B. Russell daba el siguiente ejemplo intuitivo para comprender mejor el sentido de este axioma: Supongamos que tuviésemos un conjunto infinito de pares de medias. El axioma nos asegura que existe un conjunto formado por exactamente una media de cada par. Si tuviésemos en cambio una infinidad de pares de zapatos, no necesitaríamos recurrir al Axioma de Elección para formar un conjunto con un zapato de cada par; pues bastaría que eligiéramos como elemento el zapato derecho (o el izquierdo) de cada par.

Llamaremos ZC y ZFC a las teorías que se obtienen agregando a Z y a ZF, respectivamente, el Axioma de Elección.

4.3. Formas del Axioma de Elección

Hemos enunciamos el Axioma de Elección en términos de conjuntos y elementos, del mismo modo que fueron enunciados los axiomas anteriores. Usando la noción de familia de conjuntos, podemos dar una formulación equivalente, y tal vez más clara.

AC.2) **Axioma de Elección en términos de familia de conjuntos:** *Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos (esto es, $I \neq \emptyset$, $a_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, y si $i \in I$, $j \in I$ e $i \neq j$, se tiene $a_i \cap a_j = \emptyset$). Entonces existe un conjunto d tal que $d \cap a_i = \{x_i\}$ para todo $i \in I$ (esto es, para cada $i \in I$ existe un único $x_i \in a_i$ tal que $x_i \in d$).*

Si $\{a_i\}_{i\in I}$ es una familia en las condiciones del enunciado anterior y d el conjunto cuya existencia afirma el axioma, se verifica que

$$f = \{\langle i, x_i\rangle \in I \times \bigcup_{i\in I} a_i : \{x_i\} = d \cap a_i\}$$

es una función. Luego el Axioma de Elección implica que dada una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, $\{a_i\}_{i\in I}$, existe una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} a_i$ tal que $f(i) \in a_i$ para todo $i \in I$. Recíprocamente, si existe una función f que satisface estas condiciones, y tomamos $d = img(f)$, resultará que $d \cap a_i = \{f(i)\}$ para todo i de I. Vemos así que el axioma de elección es equivalente a la existencia de una tal función f. Para dar una formulación precisa, introduciremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN: sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Una **función selectora** para esta familia es una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} a_i$ tal que $f(i) \in a_i$ para todo i en I.

De acuerdo a lo desarrollado en el párrafo anterior, el axioma de elección equivale al siguiente enunciado:

AC.3') *Toda familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos admite una función selectora.*

Para la existencia de una función selectora es claramente necesario que los conjuntos a_i sean no vacíos, pues en caso contrario no podría ser que $f(i) \in a_i$. Sin embargo, condición de que los conjuntos sean disjuntos dos a dos puede ser eliminada. Concretamente, tenemos que el siguiente enunciado, a primera vista más fuerte, resulta equivalente al axioma de elección.

AC.3) **Axioma de Elección en términos de funciones selectoras**: *Toda familia no vacía de conjuntos no vacíos admite una función selectora.*

Es claro que el enunciado anterior implica el enunciado AC.3', pues en este se pide que los conjuntos sean disjuntos dos a dos. Veamos que el enunciado AC.3' también implica el enunciado AC.3. Para demostrar que este nuevo enunciado se desprende del anterior, sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Para cada $i \in I$, definamos

$$b_i = \{i\} \times a_i = \{\langle j, x\rangle \in I \times \bigcup_{i\in I} a_i : \ j = i \wedge \ x \in a_i\} \subseteq I \times \bigcup_{i\in I} a_i.$$

Observemos que si $i \neq j$, entonces $b_i \cap b_j = \emptyset$ (en efecto $\langle i, x\rangle \neq \langle j, x\rangle$ si $i \neq j$). Por lo tanto $\{b_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. En realidad, para poder afirmar que $\{b_i\}_{i\in I}$ es una familia, debemos mostrar que existe un conjunto que tiene a los conjuntos b_i como elementos. Un tal conjunto está dado, por ejemplo, por

$$\{x \in \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i\in I} a_i) : \exists i\ (i \in I \wedge x = \{i\} \times a_i)\}.$$

Por el enunciado AC.3' existe entonces una función selectora para la familia $\{b_i\}_{i\in I}$. Esto es, existe una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} b_i$ tal que $f(i) \in b_i$ para todo i en I. Esto significa que $f(i) = \langle i, x_i\rangle$ con $x_i \in a_i$ para todo i en I. En otras palabras, f es el conjunto de los pares $\langle i, \langle i, x_i\rangle\rangle$, y tenemos que $img(f)$ es el conjunto de los pares $\langle i, x_i\rangle$. Luego $g = img(f)$ es función selectora para la familia $\{a_i\}_{i\in I}$: $g : I \to \bigcup_{i\in I} a_i$ y para todo $i \in I$, $g(i) = x_i \in a_i$.

Observemos que el producto cartesiano de los conjuntos a y b se puede expresar en términos de funciones selectoras.

DEFINICIÓN: Dados dos conjuntos a y b designaremos con $\mathcal{F}(a, b)$ al conjunto de todas las funciones de a en b: $\mathcal{F}(a, b) = \{f \in \mathcal{P}(a \times b) : f : a \to b\}$.

Lema 4.3.1. *Dados los conjuntos a y b, consideremos la familia $\{a_i\}_{i\in 2}$ tal que $a_0 = a$ y $a_1 = b$, e indiquemos con S al conjunto de todas las funciones selectoras de esta familia, esto es, $S = \{f \in \mathcal{F}(2, a\cup b) : f(0) \in a \wedge f(1) \in b\}$. Entonces se tiene que $\overline{\overline{a \times b}} = \overline{\overline{S}}$.*

Demostración. Debemos probar que existe una función biyectiva φ de S sobre $a\times b$. Si $f \in S$, pongamos $\varphi(f) = \langle f(0), f(1)\rangle \in a\times b$. Se verifica muy fácilmente que $\varphi : S \to a \times b$ es una función inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, sea $\langle x, y\rangle \in a \times b$ y definamos $f : 2 \to a \cup b$ mediante las fórmulas $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Es inmediato que $f \in S$ y que $\varphi(f) = \langle x, y\rangle$. Luego $\varphi : S \to a \times b$ es una función biyectiva. $\square$

El lema precedente nos dice que cada par ordenado $\langle x, y\rangle \in a \times b$ puede pensarse como una función selectora de la familia $\{a_i\}_{i\in 2}$, con $a_0 = a$ y $a_1 = b$. Como el Axioma de Elección nos permite hablar de funciones selectoras para cualquier familia de conjuntos, esto sugiere dar la siguiente noción de producto cartesiano para familias arbitrarias de conjuntos.

DEFINICIÓN: Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos. Se llama producto cartesiano de la familia $\{a_i\}_{i\in I}$, y se lo denota por $\prod_{i\in I} a_i$, al conjunto formado por todas las funciones selectoras de la familia. Esto es,

$$\prod_{i\in I} a_i = \{f \in \mathcal{F}(I, \bigcup_{i\in I} a_i) : \forall i(i \in I \to f(i) \in a_i)\}.$$

Para que $\prod_{i\in I} a_i \neq \emptyset$ es necesario y suficiente que exista por lo menos una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto el siguiente es un enunciado equivalente al enunciado AC.3:

AC.4) **Axioma de Elección en términos de productos cartesianos**: *El producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.*

Conviene mencionar que esta es la forma en que Zermelo enunció el Axioma de Elección (con el nombre de Axioma Multiplicativo).

Ya observamos que si $a_i = \emptyset$ para algún $i \in I$, entonces la familia $\{a_i\}_{i\in I}$ no admite funciones selectoras. Por lo tanto del enunciado AC.4 resulta que:

Teorema 4.3.2. *Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos. Entonces $\prod_{i\in I} a_i = \emptyset$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $a_i = \emptyset$.*

El Axioma de Elección nos permite de esta manera generalizar para familias arbitrarias de conjuntos la propiedad de que $a \times b = \emptyset$ si y sólo si $a = \emptyset$ ó $b = \emptyset$.

La noción de producto cartesiano de una familia de conjuntos es de gran importancia en matemática. Por eso veremos algunos ejemplos.

Comencemos por observar que si $\{a_i\}_{i\in I}$ es una familia tal que $a_i = a$ para todo $i \in I$ (o sea, $\{a_i\}_{i\in I}$ es una familia constante), entonces $\bigcup_{i\in I} a_i = a$, por lo tanto $\prod_{i\in I} a_i = \mathcal{F}(I, a)$. Esto significa que podemos pensar el conjunto $\mathcal{F}(I, a)$ de todas las funciones del conjunto I en el conjunto a como el producto cartesiano de una familia indexada por I, tal que $a_i = a$ para todo $i \in I$, esto es, como el producto de I factores iguales a a, lo que sugiere que el conjunto de las funciones de I en a sea simbolizado por a^I.

En particular, cuando $a = 2$, esto es $a_i = 2$ para todo $i \in I$, 2^I es el conjunto de todas las funciones de I en 2. Dado que $\overline{\overline{\mathcal{P}(I)}} = \overline{\overline{2^I}}$, para todo conjunto a, $\mathcal{P}(a)$ puede pensarse como el producto cartesiano de la familia $\{a_x\}_{x\in a}$, donde $a_x = 2$ para todo $x \in a$. Esto generaliza el resultado elemental de combinatoria que afirma que el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n.

Las observaciones anteriores muestran que la noción general de producto cartesiano justifica tanto la notación a^b para el conjunto de las funciones de b en a, como el nombre de conjunto potencia para el conjunto de las partes de a, $\mathcal{P}(a)$. A partir de ahora la notación a^b será usada sistemáticamente, en lugar de $\mathcal{F}(b, a)$.

Sea $\{a_i\}_{i\in n}$ una familia finita y no vacía de conjuntos no vacíos. Esto es, $n \in \omega$, $n \neq \emptyset$ y $a_i \neq \emptyset$ para todo $i \in n$. Un elemento de $\prod_{i\in n} a_i$ es una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i\in n}$, o sea un conjunto de pares ordenados $\langle i, x_i\rangle$ tales que $i \in n$ y $x_i \in a_i$. Esta función queda caracterizada si escribimos en forma ordenada los segundos elementos de dichos pares $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle$. Recíprocamente, si tenemos una n-upla $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle$ con $x_i \in a_i$, le podemos hacer corresponder el conjunto de pares $\langle 0, x_0\rangle$, $\langle 1, x_1\rangle$, ..., $\langle n-1, x_{n-1}\rangle$, y este conjunto de pares define una función selectora de la familia $\{a_i\}_{i\in n}$. Por lo tanto podemos identificar $\prod_{i\in n} a_i$ con el conjunto de las n-uplas $\langle x_0, x_1, \cdots, x_n\rangle$ tales que $x_i \in a_i$ para $i \in n$. En particular, cuando $a_i = a$ para todo $i \in n$, tenemos que $\prod_{i\in n} a_i = a^n$ se identifican con el conjunto de todas las n-uplas $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle$ de elementos de a. Cuando $a = \mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, obtenemos la conocida definición de $\mathbb{R}^n$, el conjunto de las n-uplas de números reales. Cuando $a = 2$, entonces $\prod_{i \in n} a_i = 2^n$ se identifica con el conjunto de las n-uplas $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1} \rangle$ tales que $x_i \in 2$, esto es, $x_i = 0$ o $x_i = 1$ para todo $i \in n$. En particular $\mathcal{P}(n)$ también se identifica con este conjunto de n-uplas, y esta identificación es la clave del cálculo del número de elementos de $\mathcal{P}(n)$.

Sea $a \neq \emptyset$. Una **sucesión** de elementos de a es una familia de elementos de a indexada por ω, esto es, una función de ω en a. Las sucesiones se escriben generalmente en la forma $\{x_i\}_{i \in \omega}$, donde x_n es el elemento de a que se corresponde con n por la función que define la sucesión. Si $\{a_i\}_{i \in \omega}$ es una familia de conjuntos no vacíos indexada por ω, $a_i = a$ para todo $i \in \omega$, $\prod_{i \in n} a_i = a^w$ es el conjunto de todas las sucesiones de elementos de a. Así, por ejemplo, $\mathbb{R}^\omega$ es el conjunto de todas las posibles sucesiones de números reales.

Sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y sea $a = \prod_{i \in I} a_i$. Para todo $i \in I$ y toda $f \in a$, la fórmula $p_i(f) = f(i)$ define una función $p_i : a \to a_i$, llamada la i-ésima proyección del producto cartesiano $\prod_{i \in I} a_i$ en el conjunto a_i. Una propiedad importante de las proyecciones está expresada en el siguiente lema.

Lema 4.3.3. *Sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Para todo $i \in I$, la proyección $p_i : \prod_{i \in I} a_i \to a_i$ es una función sobreyectiva.*

Demostración. Dado $x \in a_i$, debemos probar que existe $f \in \prod_{i \in I} a_i$ tal que $p_i(f) = f(i) = x$. Por la forma AC.4 del axioma de elección sabemos que $\prod_{i \in I} a_i \neq \emptyset$, por lo tanto existe $g \in \prod_{i \in I} a_i$, esto es g es una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i \in I}$. Si para todo $j \in I$ definimos $f(j)$ por las condiciones: $f(j) = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \neq i \\ x & \text{si } j = i \end{cases}$. Se verifica fácilmente que f es también una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i \in I}$, o sea , $f \in \prod_{i \in I} a_i$, y es claro que $p_i(f) = f(i) = x$. □

Veremos ahora otra formulación del Axioma de Elección.

Sea a un conjunto no vacío, entonces $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ es un conjunto no vacío y además $\cup(\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}) = a$. Luego podemos considerar $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ como una familia no vacía de conjuntos no vacíos, tomando como conjunto de índices el propio conjunto $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$, esto es $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ es la familia $\{b\}_{b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}}$. Una función selectora para esta familia es una función $f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to \cup(\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}) = a$ con la propiedad de que $f(b) \in b$. La formulación AC.3 del Axioma de Elección implica entonces que para todo $a \neq \emptyset$, existe una función $f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ tal que $f(b) \in b$ para todo $b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que para todo $a \neq \emptyset$ exista

$$f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$$

tal que $f(b) \in b$ para todo $b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ y sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Como $a = \bigcup_{i \in I} a_i \neq \emptyset$, existe $f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ tal que $f(b) \in b$ para todo $b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$. Si $d = img(f)$, entonces $d \cap a_i = \{f(a_i)\}$ para todo i en I. Es decir, se satisface la formulación

AC del Axioma de Elección. Probamos así, que la siguiente es otra formulación del Axioma de Elección, equivalente a las anteriores:

AC.5) **Axioma de Elección en términos del conjunto potencia**: *Para todo conjunto* $a \neq \emptyset$ *existe una función* $f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ *tal que* $f(b) \in b$ *para todo* $b \subseteq a$, $b \neq \emptyset$.

Finalizaremos esta sección con otra forma más del axioma de elección. Recordemos que si $f : a \to b$ es una función, la función inversa, si existe, es una función $f^{-1} : b \to a$ tal que $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in b$ y $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in a$. Vamos a generalizar la noción de inversa pidiendo que se satisfaga sólo una de las dos igualdades anteriores.

DEFINICIÓN: Sea $f : a \to b$ una función. Se llama **inversa a derecha** de f, o **pseudoinversa**, a una función $g : b \to a$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in b$.

Notemos que la condición $f(g(y)) = y$ para todo $y \in b$ implica que f debe ser sobreyectiva y que g debe ser inyectiva.

Es claro que si existe la función inversa de f, entonces f^{-1} es una pseudoinversa. Pero una función puede tener pseudoinversas sin tener una función inversa. Más precisamente, se tiene que el Axioma de Elección es equivalente al siguiente enunciado:

AC.6) **Axioma de Elección en términos de pseudoinversas:** *Toda función sobreyectiva* $f : a \to b$ *tiene pseudoinversa.*

Para probar esta equivalencia, supongamos el Axioma de Elección y sea $f : a \to b$ sobreyectiva. Entonces $\{f^{-1}(\{y\})\}_{y \in b}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, con la propiedad que $\bigcup_{y \in b} f^{-1}(\{y\}) = a$. Se verifica fácilmente que cualquier función selectora g para esta familia es una pseudoinversa de f. Recíprocamente, supongamos ahora que toda función sobreyectiva tenga pseudoinversa, y sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Sea $a = \bigcup_{i \in I} a_i$ y sea $f : a \to I$ definida del modo siguiente: $f(x) = i$ si y sólo si $x \in a_i$. Como los a_i son disjuntos dos a dos, f es una función, y como $a_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, f es sobreyectiva. Sea $g : I \to a = \bigcup_{i \in I} a_i$ una pseudoinversa de f. La condición $f(g(i)) = i$ para todo $i \in I$ implica que $g(i) \in a_i$ para todo $i \in I$, lo que muestra que g es una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i \in I}$.

Observación 4.3.4. Si $f : a \to b$ ($a \neq \emptyset$) es una función inyectiva, independientemente del Axioma de Elección, existe una función $g : b \to a$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in a$. En efecto, sea $z \in a$ y definamos g del modo siguiente:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si } y = f(x), \\ z & \text{si } y \notin img(f). \end{cases}$$

Se verifica inmediatamente que $g : b \to a$ es una función sobreyectiva y que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in a$.

4.4. Ax. Elección implica P. Buena Ordenación

Comenzaremos por probar el siguiente lema, que muestra que no puede existir una "función inyectiva" de la clase de los ordinales en un conjunto.

Lema 4.4.1. *Sea a un conjunto y F una "función" unaria tal que para todo ordinal α, $F(\alpha) \in a$. Entonces existen ordinales β y γ tales que $\beta < \gamma$ y $F(\gamma) = F(\beta)$*

Demostración. Sea $b = \{x \in a : \exists\alpha\ (Ord(\alpha) \wedge F(\alpha) = x\}$.

Para cada $x \in b$ sea $G(x)$ el primer ordinal tal que $F(\alpha) = x$.

La correspondencia $x \mapsto G(x)$ es funcional sobre b, y por el Axioma de Sustitución $c = \{G(x) : x \in a\}$ es un conjunto de ordinales. Por lo tanto debe existir un ordinal γ que no está en c (pues de lo contrario todos los ordinales formarían un conjunto).

Luego, γ no el primer ordinal que toma el valor $F(\gamma) \in b$ (si no, γ pertenecería a c) y por lo tanto existe $\beta \in \gamma$ tal que $F(\beta) = F(\gamma)$.

$\square$

Teorema 4.4.2. *En ZF el Axioma de Elección implica el Principio de Buena Ordenación.*

Demostración. Sea a un conjunto no vacío. Por la formulación del Axioma de Elección en términos de conjuntos potencia, existe una función selectora $f\colon \mathcal{P}(a) \setminus \emptyset \to a$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \subseteq a$, $x \neq \emptyset$.

Definamos $h\colon \mathcal{P}(a) \setminus \{a\} \to a$ como $h(x) = f(a \setminus x)$. El dominio de h es el conjunto de los subconjuntos *propios* de a, y para todo $x \subset a$, $h(x) \notin x$.

Sea $b \notin a$ (por ejemplo, $b = \{x \in a : x \notin x\}$) y sea $S\colon \mathcal{U} \to a \cup \{b\}$ la "función"definida del modo siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} h(img(x)) & \text{si } img(x) \in dom(h), \\ b & \text{si } img(x) \notin dom(h). \end{cases}$$

Sea $F\colon Ord \to a \cup \{b\}$ la "función" definida por recurrencia a partir de S:

$$F(\alpha) = S(F|_\alpha) = \begin{cases} h(img(F|_\alpha)) & \text{si } img(F|_\alpha) \in dom(h), \\ b & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Vamos a probar que:

($*$) Si $\beta \in \alpha$ y $F(\alpha) \in a$, entonces $F(\beta) \neq F(\alpha)$.

En efecto, $F(\alpha) \in a$ implica que $F(\alpha) = h(img(F|_\alpha))$. Como $F(\beta) \in img(F|_\alpha)$ y $h(img(F|_\alpha)) \notin img(F|_\alpha)$, debe ser $F(\alpha) \neq F(\beta)$.

De ($*$) resulta que no puede ser que $F(\alpha) \in a$ para todo ordinal α, pues en este caso tendríamos una función inyectiva de los ordinales en un conjunto, lo que no es posible por el Lema 4.4.1.

Entonces existe un ordinal α tal que $F(\alpha) = b$. Sea

$$c = \{\beta \in \alpha' : F(\beta) = b\}.$$

Como $\alpha \in c$, $c \neq \emptyset$. Sea γ el primer elemento de c. Para todo $\beta \in \gamma$, debe ser $F(\beta) \in a$, y esto significa que $img(F|_\gamma) \subseteq a$. Si fuese $img(F|_\gamma) \subset a$, sería $img(F|_\gamma) \in dom(h)$ y tendríamos que $F(\gamma) \neq b$, absurdo. Por consiguiente debe ser $img(F|_\gamma) = a$ y por $(*)$ resulta que $F|_\gamma \colon \gamma \to a$ es una biyección. Luego si definimos $x < y$ en a si y sólo si $\beta \in \alpha \in \gamma$ y $F(\beta) = x$, $F(\alpha) = y$, la relación $\leq$ resulta un buen orden sobre a.

Hemos probado así que el Axioma de Elección implica la existencia de una relación de buen orden sobre todo conjunto a. $\square$

De los Teoremas 4.2.2 4.4.2 resulta la equivalencia entre el Principio de Buena Ordenación y el Axioma de Elección. Si bien la demostración del Teorema 4.2.2 es válida en Z, en la demostración que dimos del Teorema 4.4.2 se recurre al Lema 4.4.1 y por lo tanto se requiere el Axioma de Sustitución. Luego la equivalencia fue probada en ZF. En realidad la equivalencia entre el Axioma de Elección y el Principio de Buena ordenación puede demostrarse en Z (ver, por ejemplo, [5, 6]).

Vamos a probar ahora la equivalencia del Axioma de Elección con el llamado Lema de Zorn, que es posiblemente la forma más común en la que se utiliza en matemática.

Teorema 4.4.3 (Lema de Zorn). *Sea $(a, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío tal que todo subconjunto bien ordenado de a tiene cota superior. Entonces existe un elemento maximal de a.*

Demostración. Como $a \neq \emptyset$, por la formulación del Axioma de Elección en términos de conjuntos potencia, existe una función selectora $h \colon \mathcal{P}(a) \setminus \emptyset \to a$ tal que $h(x) \in x$ para todo $x \subseteq a$, $x \neq \emptyset$.

Sea c el conjunto de los subconjuntos de a que tienen cotas superiores estrictas:

$$c = \{x \in \mathcal{P}(a) : \exists s \forall t (t \in x \to t < s)\}.$$

Para todo $x \in c$, sea m_x el conjunto de las cotas superiores estrictas de x.

Definamos $f \colon c \to a$ como $f(x) = h(m_x)$ para todo $x \in c$. Se tiene que $f(x)$ es una cota superior estricta de x.

Sea $b \notin a$ y consideremos la "función" $S \colon \mathcal{U} \to a \cup \{b\}$ definida del modo siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} f(img(x)) & \text{si } img(x) \in c, \\ b & \text{si } img(x) \notin c. \end{cases}$$

Por recurrencia se define la "función" $F \colon Ord \to a \cup \{b\}$ satisfaciendo

$$F(\alpha) = \begin{cases} f(img(F|_\alpha)) & \text{si } img(F|_\alpha) \in c, \\ b & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Veamos que:

(∗) Si $\beta \in \alpha$ y $F(\alpha) \in a$, entonces $F(\beta) < F(\alpha)$.

En efecto, $F(\alpha)$ es una cota superior estricta de $img(F|_\alpha)$ y $F(\beta) \in img(F|_\alpha)$.

Por el Lema 4.4.1, (∗) implica que existe un ordinal α tal que $F(\alpha) = b$. Sea γ el primer elemento del conjunto $\{\beta \in \alpha' : F(\beta) = b\}$.

De (∗) se deduce que si $\xi \in \beta \in \alpha$, entonces $F(\xi) < F(\beta)$, y como γ es totalmente ordenado, $F|_\gamma \colon \gamma \to a$ es un monomorfismo. Luego $img(F|_\gamma)$ con el orden heredado de a es isomorfo a γ y por lo tanto es un subconjunto bien ordenado de a. Entonces $img(F|_\gamma)$ tiene cota superior. Si alguna cota superior fuese estricta, $img(F|_\gamma) \in c$ lo que implicaría que $F(\gamma) \neq b$. Por lo tanto toda cota superior de $img(F|_\gamma)$ es un elemento maximal de $(a, \leq)$. □

Observación 4.4.4. El Lema de Zorn se enuncia habitualmente con la hipótesis más exigente: *todo subconjunto* totalmente *ordenado tiene cota superior.*

Veremos ahora una variante del Lema de Zorn que es muy usada en las aplicaciones.

DEFINICIÓN: Un conjunto a se dice de **carácter finito** si para todo x, $x \in a$ si y sólo si todos los subconjuntos finitos de x pertenecen a a.

Una propiedad P es de carácter finito si $\{x : P(x)\}$ es un conjunto de carácter finito. Por ejemplo, para un conjunto ordenado "ser totalmente ordenado" es una propiedade de carácter finito.

Corolario 4.4.5 (Lema de Tukey)**.** *Sea a un conjunto de carácter finito. Entonces existe un elemento maximal para el conjunto ordenado $(a, \subseteq)$, esto es, un elemento maximal respecto a la inclusión.*

Demostración. Sea a un conjunto de carácter finito y sea $c \in \mathcal{P}(a)$ totalmente ordenado por inclusión:

$$\forall x \forall y(((x \in c) \wedge (y \in c)) \to ((x \subseteq y) \vee (y \subseteq x))).$$

Veamos que $\cup c \in a$. Para ello sea d un subconjunto finito de $\cup c$. Esto es, existen $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 1$, tales que $d = \{x \in \cup c : (x = x_1) \vee \cdots \vee (x = x_n)\}$.

Para cada $1 \leq i \leq n$ existe $y_i \in c$ tal que $x_i \in y_i$. Como c es totalmente ordenado por inclusión, podemos suponer que los índices están elegidos de modo que $y_1 \subseteq y_2 \subseteq \cdots \subseteq y_n$. Esto implica que $d \subseteq y_n$, esto es, que d es un subconjunto finito de un elemento de a, y por lo tanto $d \in a$. Luego todo subconjunto finito de $\cup c$ está en a, lo que implica $\cup c \in a$.

Como $\cup c$ es cota superior de c respecto de la inclusión, hemos probado que todo subconjunto de a totalmente ordenado por inclusión (y por lo tanto, todo subconjunto bien ordenado por inclusión) tiene cota superior. Entonces por el Lema de Zorn resulta que existe en a un elemento maximal respecto a la inclusión. □

Teorema 4.4.6. *En Z, el Lema de Tukey implica el Axioma de Elección.*

Demostración. Sea a un conjunto no vacío y sea c el conjunto de las funciones selectoras parciales de $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ en a, esto es

$$c = \{f \in \mathcal{P}(a \times a) : f \text{ es función}, dom(f) \subseteq \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \wedge f(x) \in x \forall x \in dom(f)\}.$$

Es fácil verificar que c es de carácter finito, luego por el Lema de Tukey existe un elemento $h \in c$ maximal respecto a la inclusión. Para terminar la demostración bastará probar que $dom(h) = \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$, pues entonces h será la función requerida en la formulación del Axioma de Elección en términos del conjunto potencia.

Observemos que si $f, g \in c$, entonces $f \subseteq g$ si y sólo si $dom(f) \subseteq dom(g)$ y $g(x) = f(x)$ para todo $x \in dom(f)$.

Supongamos (por el absurdo) que $dom(h) \subset \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$. Entonces existiría un subconjunto no vacío y de a tal que $y \notin dom(y)$. Sea $t \in y$ y definamos $h^* = h \cup \{\langle y, t\rangle\}$. Es claro que $h^* \in c$ y que $h \subset h^*$, contradiciendo la maximalidad de h. Luego debe ser $dom(h) = \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$. □

La teoría de conjuntos basada en los axiomas de Zermelo - Fraenkel más el Axioma de Elección se la denota ZFC.

4.5. Cardinales

El siguiente resultado, debido a Cantor, tendrá un papel central en lo que sigue.

Teorema 4.5.1. *Para todo conjunto a, $\overline{\overline{a}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}$.*

Demostración. La función $h \colon a \to \mathcal{P}(a)$ definida por $h(x) = \{x\}$ es inyectiva, lo que implica que $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}$.

Para ver que no puede existir una biyección, para toda $f \colon a \to \mathcal{P}(a)$ sea

$$b = \{x \in a : x \notin f(x)\}.$$

Si f fuese sobreyectiva, entonces existiría $z \in a$ tal que $f(z) = b$, lo que implicaría la contradicción $z \in b \leftrightarrow z \notin f(z) = b$. Luego no puede existir una función de a sobre $\mathcal{P}a$, por lo que resulta $\overline{\overline{a}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}$. □

DEFINICIÓN: Un **cardinal** es un ordinal α tal que si $\beta \in \alpha$, entonces $\overline{\overline{\beta}} < \overline{\overline{\alpha}}$. La fórmula que indica que x es un cardinal será abreviada $Card(x)$.

Los números naturales y ω son ejemplos de cardinales. Si $\alpha \notin w$ el ordinal α' es un ejemplo de un ordinal que no es cardinal.

Teorema 4.5.2. *En ZFC, para todo conjunto a, existe un único cardinal α tal que $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\alpha}}$.*

Demostración. Por el Axioma de Elección, vale el Principio de Buena Ordenación y por lo tanto todo conjunto es bien ordenado y por el Teorema 3.2.3 existe un ordinal isomorfo a cada conjunto. Sea γ tal que $\gamma \sim \mathcal{P}(a)$, como un isomorfismo es en particular biyectivo, tenemos que $\bar{\bar{\gamma}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}$. Sea $c = \{\beta \in \gamma : \bar{\bar{\beta}} = \bar{\bar{a}}\}$. $\neq \emptyset$ porque siempre existe un ordinal isomorfo a a. Sea α el primer elemento de c. $\bar{\bar{\alpha}} = \bar{\bar{a}}$ y α es un cardinal: si $\beta \in \alpha$, $\bar{\bar{\beta}} \leq \bar{\bar{\alpha}}$ y $\bar{\bar{\beta}} \neq \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{\alpha}}$, entonces $\bar{\bar{\beta}} < \bar{\bar{\alpha}}$. □

Observación 4.5.3. Para probar el enunciado: *Para todo conjunto a existe un cardinal α tal que $\bar{\bar{\alpha}} = \bar{\bar{a}}$* se usó el Axioma de Elección. En realidad este enunciado equivale al Axioma de Elección: una biyección entre α y a permite transferir el buen orden de α a a, y por ende el enunciado implica que todo conjunto admite un buen orden.

DEFINICIÓN: Dado un conjunto a, al único cardinal coordinable con a lo llamaremos el **cardinal de** a y lo denotaremos $card(a)$.

No debemos confundir las notaciones $card(x)$ y $Card(x)$.

Observemos que $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$ si y sólo si $card(a) = card(b)$, y $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ si y sólo si $card(a) \leq card(b)$. La verificación de esto es muy sencilla si tenemos en cuenta el teorema anterior.

Si a es un conjunto de cardinales, entonces $\gamma = \cup a$ es un cardinal: ya hemos visto que γ es un ordinal. Además, si $\beta \in \gamma$, entonces $\beta \in \alpha$ para algún α de a. Como α es cardinal, $\bar{\bar{\beta}} < \bar{\bar{\alpha}} \leq \bar{\bar{\gamma}}$.

Paradoja de Cantor: *No existe un conjunto que tenga a todos los cardinales como elementos.*

Demostración. Si a contiene a todos los cardinales, sea $b = \{\alpha \in a : Card(\alpha)\}$. Sea $\gamma = \cup b$. De lo visto anteriormente sabemos que γ es un cardinal. Tenemos que $\gamma \in b$ y además $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in b$. Entonces como $card(\mathcal{P}(\gamma)) \in b$, sería y $card(\mathcal{P}(\gamma)) \leq \gamma$, en contradicción con el Teorema 4.5.1. □

4.6. Operaciones con cardinales

DEFINICIÓN: Sean α y β cardinales y a y b conjuntos disjuntos tales que $\bar{\bar{\alpha}} = \bar{\bar{a}}$ y $\bar{\bar{\beta}} = \bar{\bar{b}}$. (Tales conjuntos siempre existen, por ejemplo: $a = \{0\} \times \alpha$ y $b = \{1\} \times \beta$). Definimos la **suma cardinal** $\alpha + \beta$ de α y β al cardinal de $a \cup b$: $\alpha + \beta = card(a \cup b)$.

La demostración del siguiente teorema es muy sencilla y queda a cargo del lector.

Teorema 4.6.1. *La suma de cardinales goza de las siguientes propiedades, donde α, β, γ denotan cardinales arbitrarios:*

I) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

II) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

III) $\alpha + 0 = \alpha$,

IV) $(\alpha \leq \beta) \to (\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma)$.

DEFINICIÓN: Sean α y β cardinales. El **producto cardinal** de α por β es el cardinal $\alpha \cdot \beta = card(\alpha \times \beta)$

Teorema 4.6.2. *El producto de cardinales goza de las siguientes propiedades, donde α, β, γ denotan cardinales:*

I) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,

II) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,

III) $\alpha \cdot 1 = \alpha$,

IV) $\alpha \cdot 0 = 0$,

V) $(\alpha \leq \beta) \to (\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma)$,

VI) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

Demostración. Ejercicio para el lector. □

Observación 4.6.3. Sean α, β cardinales. Como por las definiciones de suma y producto de ordinales y cardinales $\overline{\overline{\alpha + \beta}} = \overline{\overline{\alpha \oplus \beta}}$ y $\overline{\overline{\alpha \cdot \beta}} = \overline{\overline{\alpha \odot \beta}}$, resulta que $\alpha + \beta \leq \alpha \oplus \beta$ y $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \odot \beta$, y que una de estas desigualdades es una igualdad si y sólo si su segundo miembro es un cardinal.

Teorema 4.6.4. *Si $m, n \in \omega$, entonces $m + n = m \oplus n$ y $m \cdot n = m \odot n$.*

Demostración. Resulta de la observación anterior y de los Teoremas 3.4.5 y 3.5.3. □

Del teorema anterior se desprende que la suma cardinal y el producto cardinal de números naturales coinciden con la suma y el producto usuales para los enteros no negativos. Pero la situación es muy diferente para cardinales infinitos, como lo muestra el resultado siguiente.

Teorema 4.6.5. *Sea γ un cardinal. Si $\gamma \geq \omega$, entonces $\gamma^2 = \gamma$.*

Demostración. Supongamos que la afirmación es falsa. Como para todo conjunto a, $card(a) \leq card(a \times a)$, debe existir un cardinal $\alpha \geq \omega$ tal que $\alpha < \alpha^2$. Sea

$$c = \{\beta \in card(\mathcal{P}(\alpha)) : \beta < \beta^2 \wedge \omega \leq \beta\}.$$

Como $c \neq \emptyset$ pues por el Teorema 4.5.1 $\alpha \in c$, tiene primer elemento, que denotaremos γ.

Sea $p = \gamma \times \gamma$ y $p_\mu = \{(\alpha, \beta) \in p : \text{máx}\{\alpha, \beta\} = \mu\}$.

Tenemos que $p_\mu \cap p_\nu = \emptyset$ si $\mu \neq \nu$, y $\bigcup_{\mu \in \gamma} p_\mu = p$.

Obtenemos un orden estricto total $\triangleright$ sobre p si consideramos cada p_ξ ordenado lexicográficamente y a cada elemento de p_μ menor que cualquier elemento de p_ν siempre que $\mu < \nu$. Más precisamente, definimos orden estricto $\triangleleft$ sobre p del modo siguiente: $\langle \alpha, \beta \rangle \triangleleft \langle \delta, \zeta \rangle$ si y sólo si

$$[\text{máx}(\alpha, \beta) < \text{máx}(\delta, \zeta)] \vee [(\text{máx}(\alpha, \beta) = \text{máx}(\delta, \zeta)) \wedge (\alpha < \delta)] \vee$$
$$[(\text{máx}(\alpha, \beta) = \text{máx}(\delta, \zeta)) \wedge ((\alpha = \delta) \wedge (\beta < \zeta))].$$

Para ver que $\trianglelefteq$ es un buen orden, sea $s \subseteq p$, $s \neq \emptyset$. Como la correspondencia $\langle \alpha, \beta \rangle \mapsto \text{máx}(\alpha, \beta)$ es funcional, por el Axioma de Sustitución tenemos que $\{\text{máx}(\alpha, \beta) : \langle \alpha, \beta \rangle \in s\}$ es un conjunto no vacío de ordinales. Sea μ su primer elemento y sean α_0 el primer elemento del conjunto

$$\{\alpha \in \mu : \exists\, \beta(\langle \alpha, \beta \rangle \in s \cap p_\mu)\}$$

y β_0 el primer elemento del conjunto

$$\{\beta \in \mu : \exists\, \alpha(\langle \alpha, \beta \rangle \in s \cap p_\mu)\}.$$

Es inmediato verificar que $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle$ es el primer elemento de s respecto del orden $\trianglelefteq$. Luego $(P, \trianglelefteq)$ es un conjunto bien ordenado y por el Teorema 3.2.3 existe un ordinal $\theta \sim (p, \trianglelefteq)$.

Como $\theta \geq card(p) > \gamma$, resulta que $\gamma \in \theta$. Por lo tanto γ debe ser similar a una sección inicial de θ. Esto es, existe un par $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \in p$ tal que

$$\gamma \sim q = \{(\alpha, \beta) \in p : (\alpha, \beta) < (\alpha_1, \beta_1)\}.$$

Esto implica que $\gamma = card(q)$.

Sea $\mu_1 = \text{máx}(\alpha_1, \beta_1)$. Como $\mu_1 \in \gamma$, $card(\mu_1) < \gamma$.

Veamos que también $card(\mu_1 \oplus 1) < \gamma$. En efecto, si $\mu_1 \in \omega$, entonces también $\mu_1 \oplus 1 \in \omega$ y $card(\mu_1 \oplus 1) = \mu_1 \oplus 1 \in \gamma$. Si $\mu_1 \geq \omega$, entonces $card(\mu_1 \oplus 1) = card(\mu_1) \in \gamma$.

Como $q \subset \mu_1 \oplus 1 \times \mu_1 \oplus 1$, $card(q) = \gamma$ y γ es el primer cardinal estrictamente menor que su cuadrado, se tiene que

$$\gamma \leq card(\mu_1 \oplus 1) \times card(\mu_1 \oplus 1) = card(\mu_1 \oplus 1) < \gamma,$$

lo que es absurdo. Luego no puede existir un cardinal $\gamma \geq \omega$ tal que $\gamma < \gamma^2$. □

Corolario 4.6.6. *Sean α y β cardinales, $\alpha \leq \beta$ y $\beta \geq \omega$ entonces,*

I) $\alpha + \beta = \beta$

II) *Si $\emptyset < \alpha$, entonces $\alpha \cdot \beta = \beta$*

Demostración.

$$\beta = 0 + \beta \leq \alpha + \beta \leq \beta + \beta = (1+1) \cdot \beta = 2 \cdot \beta \leq \beta^2 = \beta,$$

lo que prueba I), y II) resulta de

$$\beta = 1 \cdot \beta \leq \alpha \cdot \beta \leq \beta^2 = \beta.$$

□

Observación 4.6.7. *Si $\alpha \geq \omega$ ó $\beta \geq \omega$ entonces*

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \text{máx}\{\alpha, \beta\}.$$

DEFINICIÓN: Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de cardinales. Definimos la **suma de la familia** como $\sum_{i\in I} \alpha_i = card(\bigcup_{i\in I}(\alpha \times \{i\}))$.

Corolario 4.6.8. *Si $I \neq \emptyset$, $\alpha_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$ y además, I o alguno de los α_i es mayor que ω, entonces $\sum_{i\in I} \alpha_i = \text{máx}\{card(I), \sup_{i\in I} \alpha_i\}$.*

Demostración. Como

$$\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{1 \times \bigcup_{i\in I}\{i\}}} \leq \overline{\overline{\bigcup_{i\in I}(1 \times \{i\})}} \leq \overline{\overline{\bigcup_{i\in I}(\alpha_i \times \{i\})}} = \sum_{i\in I} \alpha_i$$

y

$$\overline{\overline{\alpha_i}} = \overline{\overline{\alpha_i \times \{i\}}} \leq \sum_{i\in I} \alpha_i,$$

resulta que

$$\text{máx}\{\overline{\overline{I}}, \sup_{i\in I} \alpha_i\} \leq \sum_{i\in I} \alpha_i. \tag{4.1}$$

Sea $\alpha = \sup_{i\in I} \alpha_i$. Entonces

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \overline{\overline{\bigcup_{i\in I} \alpha_i \times \{i\}}} \leq \overline{\overline{\bigcup_{i\in I} \alpha \times \{i\}}} = \overline{\overline{\alpha \times \bigcup_{i\in I}\{i\}}} = \alpha \cdot \overline{\overline{I}} = \text{máx}\{\overline{\overline{I}}, \sup_{i\in I} \alpha_i\}. \tag{4.2}$$

De (4.1) y (4.2) se obtiene la igualdad enunciada. $\square$

Observación 4.6.9. Del corolario anterior resulta en particular que *la unión de una familia numerable de conjuntos numerables es numerable.*

DEFINICIÓN: $\alpha^\beta = card(\{f \in \beta \times \alpha : \ f : \beta \mapsto \alpha\})$.

En particular $2^\alpha = card(\{f \in \alpha \times 2 : f : \alpha \to 2\})$

Observemos que la función $g : P(\alpha) \mapsto \{f \in \alpha \times 2 : f : \alpha \mapsto 2\}$ que asigna a cada y la función $f_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in y \\ 0 & \text{si } x \notin y \end{cases}$ es biyectiva, por lo tanto $2^\alpha = card(P(\alpha))$.

Teorema 4.6.10. *Si α, β y γ son cardinales,*

I) $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$

II) $\alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma = (\alpha \cdot \beta)^\gamma$

III) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

Demostración. Sean a, b y c conjuntos disjuntos tales que $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{\alpha}}$, $\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{\beta}}$, $\bar{\bar{c}} = \bar{\bar{\gamma}}$, entonces:

i) Tenemos que $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = card(a^b \times a^c)$ y $\beta + \gamma = card(b \cup c)$. Sea $H : a^b \times a^c \mapsto a^{b\cup c}$ dada por $H(f,g) = u$, $u(x) = \{f(x)$ si $x \in b,\ g(x)$ si $x \in c$. Es claro que H es biyectiva.

ii) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = card((a \times b)^c)$. Sea $H : a^c \times b^c \mapsto (a \times b)^c$ dada por $H(f,g) = u$, $u(x) = (f(x), g(x))$ para $x \in c$. H es una biyección.

iii) $(\alpha^\beta)^\gamma = card((a^b)^c)$, entonces $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = card(a^{b\times c})$. Si $f \in (a^b)^c$, $f(x) \in a^b$ para $x \in c$. Sea $H : (a^b)^c \mapsto a^{b\times c}$ definida por $H(f) = u$, $u(x,y) = g(y)$ donde $g = f(x)$ y $x \in c$. H resulta biyectiva. □

Teorema 4.6.11. *Para todo cardinal γ existe un único cardinal γ^+ que satisface las siguientes condiciones:*

i*)* $\gamma < \gamma^+$

ii*) Si α es un cardinal y $\gamma < \alpha$, entonces $\gamma^+ \leq \alpha$.*

Demostración. Sea $\lambda = 2^{2^\gamma}$. Sea $A = \{\alpha \in \lambda : \alpha$ es cardinal y $\gamma \in \alpha\}$. $A \neq \emptyset$ porque $2^\lambda \in A$, ya que $\gamma \in\ 2^\gamma \in 2^{2^\gamma}$. Sea β el primer elemento de A. β cumple las condiciones. □

Definición: Si γ es un cardinal, al único cardinal que satisface *i)* y *ii)*, lo llamaremos **cardinal sucesor** de γ y lo denotaremos por γ^+.

Observación 4.6.12. Como $\omega < 2^\omega$, resulta que $\omega < \omega^+ \leq 2^\omega$.

La hipótesis del continuo dice que $\omega^+ = 2^\omega$. Y la hipótesis del continuo generalizada dice que $\gamma^+ = 2^\gamma$. Este nombre se debe a que 2^ω es el cardinal del conjunto de los números reales (continuo numérico). Luego la hipótesis del continuo significa que no hay un cardinal intermedio entre el cardinal de los naturales y el cardinal de los reales. La validez de estos enunciados fue un problema abierto en la teoría de conjuntos desde que fuera planteado por el mismo Cantor, hasta que en 1962 P. Cohen mostró que la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas ZFC. La demostración de los resultados de Cohen escapan al nivel de este curso. Referimos al lector interesado al libro de Kunen [9].

Teorema 4.6.13. *Si un cardinal γ es mayor o igual que ω, el conjunto de ordinales de cardinal γ, tiene cardinal γ^+.*

Demostración. Sea $a = \{\alpha \in \gamma^+ : card(\alpha) = \gamma\}$. Si $x \in \gamma \cup a$, entonces $x \in \gamma$ ó $x \in a$, luego $x \in \gamma^+$. Si $x \in \gamma^+$, entonces $card(x) < \gamma^+$. Si $card(x) > \gamma$, entonces $card(x) \geq \gamma^+$ en contradicción con lo anterior. Por lo tanto $card(x) \leq \gamma$ y entonces $x \in \gamma \cup a$. Hemos probado que $\gamma^+ = \gamma \cup a$. Como $\gamma \cap a = \emptyset$, se tiene $\gamma^+ = \gamma + card(a) = \text{máx}(\gamma, card(a))$, y como $\gamma^+ > \gamma$, debe ser $card(a) = \gamma^+$. □

Observación 4.6.14. ω^+ *es el cardinal de todos los ordinales numerables.*

4.7. La operación $\aleph$

En esta sección veremos otra importante aplicación del Teorema 3.3.4.

Para todo conjunto x sea $F(x)$ el primer cardinal infinito γ tal que $\gamma \notin img(x)$.

El Principio de Definición por Recurrencia garantiza la existencia de una operación $\aleph : Ord \to \mathcal{U}$ tal que $\aleph(\alpha) = F(\aleph|_\alpha) =$ el primer cardinal infinito γ tal que $\gamma \notin \{\aleph(\beta) : \beta \in \alpha\}$.

La notación que usaremos será $\aleph_\alpha = \aleph(\alpha)$.

Observación 4.7.1. *Si $\alpha < \beta$, entonces $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.*

Teorema 4.7.2. *Para todo cardinal infinito γ, existe un ordinal α tal que $\aleph_\alpha = \gamma$.*

Demostración. Sea γ un cardinal infinito. Dado que γ es un conjunto existe un ordinal α tal que $\aleph_\alpha \notin \gamma$, de lo contrario, supongamos que $\aleph_\alpha \in \gamma$ para todo α; por el Lema 4.4.1 existirían α y β tales que $\alpha \in \beta$ y $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$ en contradicción con la observación anterior.

Luego, $\gamma \leq \aleph_\alpha$. Si $\gamma < \aleph_\alpha$, como $\aleph_\alpha$ es el primer cardinal infinito que no está en $im(\aleph|_\alpha)$ y γ es un cardinal infinito, tenemos que $\gamma \in im(\aleph|_\alpha)$, entonces $\gamma = \aleph_\beta$ para algún $\beta \in \alpha$. $\square$

Notemos que $\aleph_0 = \omega$ y $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$.

4.8. Ejercicios

Ejercicio 4.8.1. *Demuestre que el Axioma de Elección implica que los enunciados listados en el Corolario 2.4.7 son equivalentes.*

Ejercicio 4.8.2. *El Lema de Hausdorff dice que todo conjunto ordenado contiene un subconjunto totalmente ordenado maximal respecto a la inclusión. Demuestre que:*

1. *El Lema de Zorn (Teorema 4.4.3) implica el Lema de Hausdorff.*
2. *El Lema de Hausdorff implica el Lema de Tukey (Corolario 4.4.5).*

Ejercicio 4.8.3. *Demuestre los Teoremas 4.6.1 y 4.6.2.*

Ejercicio 4.8.4. *Sean a, b conjuntos tales que $a \subset b$ y $\omega \leq card(a) < card(b)$. Pruebe que $card(b \setminus a) = card(b)$.*

Ejercicio 4.8.5. *Calcule el cardinal del conjunto de los subconjuntos finitos de ω.*