Capítulo 5

El Axioma de Regularidad

5.1. Conjuntos regulares

Consideremos la operación

$$S(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x = \emptyset \\ \bigcup_{z \in Im(x)} \mathcal{P}(z) & \text{si } x \neq \emptyset \end{cases}$$

El Principio de Definición por Recurrencia nos dice que existe una operación V tal que $V(\alpha) = S(V|_\alpha)$ para todo ordinal α. Siguiendo la costumbre en textos de teoría de conjuntos escribiremos V_α en lugar de $V(\alpha)$.

Se tiene que que:

$$V_0 = S(V|_0) = \emptyset \tag{5.1}$$

y

$$\text{si} \quad \alpha > 0, \quad V_\alpha = S(V|_\alpha) = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{P}(V_\beta). \tag{5.2}$$

Es claro que si $\alpha < \beta$, entonces $V_\alpha \subseteq V_\beta$, lo que implica que $\mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(V_\beta)$. Luego para todo ordinal α:

$$V_{\alpha \oplus 1} = \bigcup_{\beta \in \alpha \oplus 1} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{P}(V_\beta) = \mathcal{P}(V_\alpha). \tag{5.3}$$

Luego se tiene que

$$\forall x (x \in V_{\alpha \oplus 1} \iff x \subseteq V_\alpha. \tag{5.4}$$

Si α es límite, teniendo en cuenta que $\beta \in \alpha$ implica que $\beta' \in \alpha$, resulta que

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta \leq \alpha} V_{\beta \oplus 1} \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$$

Por otra parte, como $V_\beta \subseteq V_\alpha$ para todo $\beta \in \alpha$, también se tiene que $\bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta \subseteq V_\alpha$. Luego podemos concluir que

$$\text{Si} \quad \alpha \text{ es un ordinal límite, entonces} \quad V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta. \tag{5.5}$$

DEFINICIÓN: Diremos que el conjunto a es **regular** si existe un ordinal α tal que $a \in V_\alpha$; en ese caso llamaremos **rango** de a, y lo simbolisaremos $rg(a)$, al primer ordinal γ tal que $a \in V_\gamma$.

La clase de todos los conjuntos regulares será denotada por $\mathcal{V}$. Informalmente, "$\mathcal{V} = \bigcup_{Ord(\alpha)} V_\alpha$."

El rango de un conjunto no puede ser límite, esto es, si a es un conjunto y $\alpha = rg(a)$, entonces debe existir un β tal que $\alpha = \beta \oplus 1$. Para ver esto, basta observar que si α es límite, entonces por (5.3), si $a \in V_\alpha$, existe $\beta \in \alpha$ tal que $a \in V_\beta$ y esto contradice que α sea el rango de a.

Teorema 5.1.1. *a es regular si y sólo si todos los elementos de a son regulares. Además, $x \in a$ implica que $rg(x) < rg(a)$.*

Demostración. Sea a regular. Existe β tal que $rg(a) = \beta \oplus 1$. Luego por (5.4), $a \subseteq V_\beta$ y por lo tanto, si $x \in a$, entonces $x \in V_\beta$. Además, $rg(x) \leq \beta < \beta \oplus 1$.

Supongamos que para todo $x \in a$, x sea regular y sea

$$c = \{rg(x) : x \in a\}.$$

Por el Axioma de Sustitución, c es un conjunto, y por (iii) del Teorema 2.3.6, $\cup c$ es un ordinal, que llamaremos α: $\alpha = \cup c$. Tenemos que $x \in V_{rg(x)} \subseteq V_\alpha$. Por lo tanto $a \subseteq V_\alpha$, esto es, $a \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha\oplus 1}$. □

Corolario 5.1.2. *Si x es regular, entonces $x \notin x$.*

Teorema 5.1.3. *Todo ordinal α es regular y $rg(\alpha) = \alpha \oplus 1$.*

Demostración. Para demostrar este hecho veremos que para todo ordinal α

I) $\alpha \in V_{\alpha\oplus 1}$ y

II) $\alpha \notin V_\alpha$.

Para probar *i)*, supongamos por absurdo que exista un ordinal α tal que $\alpha \notin V_{\alpha\oplus 1}$. Entonces

$$c = \{\beta \in \alpha \oplus 1 : \beta \notin V_{\beta\oplus 1}\}$$

es un conjunto no vacío de ordinales y tiene primer elemento, que llamaremos γ. Si $\beta \in \gamma$, $\beta \in V_{\beta\oplus 1}$; entonces $\gamma \subseteq \bigcup_{\beta\in\gamma} V_{\beta\oplus 1} = \bigcup_{\beta\in\gamma} \mathcal{P}(V_\beta) = V_\gamma$, y esto dice que $\gamma \in \mathcal{P}(V_\gamma) = V_{\gamma\oplus 1}$ en contradicción con $\gamma \in c$. Por lo tanto todo ordinal α debe satisfacer *i)*.

Para probar *ii)*, supongamos por absurdo que exista un ordinal γ tal que $\gamma \in V_\gamma$. Entonces por (5.4) debería existir $\beta \in \gamma$ tal que $\gamma \in \mathcal{P}(V_\beta)$. Como $\beta \in \gamma \subseteq V_\beta$ resulta que $\beta \in V_\beta$. Esto muestra que para todo ordinal γ, el conjunto $c = \{\alpha \in \gamma \oplus 1 : \alpha \in V_\alpha\}$ no puede tener primer elemento, por lo que debe ser $c = \emptyset$. Esto significa que todos los ordinales deben satisfacer *ii)*. □

Teorema 5.1.4. *V_α es transitivo para todo α.*

Demostración. Si $a \in V_\alpha$ y $b \in a$, entonces $rg(b) < rg(a) \leq \alpha$. Por lo tanto $b \in V_{rg(b)} \subset V_{rg(\alpha)} \subseteq V_\alpha$. $\square$

DEFINICIÓN: Se dice que una clase $\mathcal{C}$ definida por una fórmula $\psi(x)$ es **transitiva** si se cumple que $\forall x\ \forall y\ [(y \in x\ \wedge\ \psi(x))\ \rightarrow\ \psi(y)]$.

Teorema 5.1.5. *$\mathcal{V}$ es una clase transitiva.*

Demostración. Sean x en $\mathcal{V}$ e $y \in x$ .Existe α tal que $x \in V_\alpha$. Como V_α es transitivo, $y \in V_\alpha$; por lo tanto y está en $\mathcal{V}$. $\square$

Veremos a continuación que la clase de los conjuntos regulares es cerrada por las operaciones del álgebra de conjuntos.

Teorema 5.1.6. *Si x está en $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{P}(x)$, $\cup x$, $\{x\}$ están en $\mathcal{V}$ y el rango de estos conjuntos es menor estricto que $rg(x) \oplus \omega$.*

Además, si x e y están en $\mathcal{V}$, entonces $x \times y$, $x \cup y$ y y^x están en $\mathcal{V}$ y el rango de estos conjuntos es menor estricto que $\text{máx}\{rg(x), rg(y)\} \oplus \omega$.

Demostración. Existe un ordinal β tal que $rg(x) = \alpha = \beta \oplus 1$.

Como $x \in V_{\beta\oplus 1} = \mathcal{P}(V_\beta)$, entonces $x \subset V_\beta$.

Si $y \in \mathcal{P}(x)$, entonces $y \subset x \subset V_\beta$, por consiguiente $y \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta\oplus 1}$. Lo anterior muestra que $\mathcal{P}(x) \subset V_{\beta\oplus 1}$, por lo tanto $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(V_{\beta\oplus 1}) = V_{\beta\oplus 2} = V_{\alpha\oplus 1}$.

Si $y \in \cup x$, entonces existe z en x tal que $y \in z$. Como V_β es transitivo e $y \in z \in x \subset V_\beta$, tenemos que $y \in V_\beta$. En consecuencia, $\cup x \subset V_\beta$ y se concluye que $\cup x \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta\oplus 1} = V_\alpha$.

Sea $\alpha = \text{máx}\{rg(x), rg(y)\}$. Dado que x e y pertenecen a V_α, $\{x, y\} \subset V_\alpha$, entonces $\{x, y\} \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha\oplus 1}$.

De lo visto para la unión se deduce que $x \cup y = \cup\{x, y\} \in V_{\alpha\oplus 1}$.

Como $V_{\alpha\oplus 1}$ es transitivo, también tenemos que

$$x \times y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(V_{\alpha\oplus 1}))) = V_{\alpha\oplus 4}.$$

Lo anterior implica que $y^x \in \mathcal{P}(x \times y) \subset \mathcal{P}(V_{\alpha\oplus 4}) = V_{\alpha\oplus 5}$.

$\square$

Corolario 5.1.7. *Si α es un ordinal límite y $x \in V_\alpha$, entonces $\mathcal{P}(x)$, $\cup x$ y $\{x\}$ pertenecen a V_α. Además, si x e y están en V_α, entonces $x \times y$, $x \cup y$ e y^x pertenecen a V_α.*

Demostración. El teorema anterior muestra que $\cup x$, $\mathcal{P}(x)$, $\{x\}$, $x \times y$, $x \cup y$ e y^x pertenecen todos a $V_{\beta\oplus 5}$, con $\beta = \text{máx}\, rg(x), rg(y)$. Como α es límite y $\beta < \alpha$, entonces $(\beta \oplus 5) \in \alpha$. $\square$

Si construimos los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ de la manera usual partiendo de del conjunto ω de los números naturales, obtenemos que todos estos conjuntos pertenecen a $V_{\omega\oplus\omega}$.

Corolario 5.1.8. *Sea β un ordinal, entonces β pertenece a V_α si y sólo si β pertenece a α.*

Demostración. Si $\beta \in \alpha$, entonces $\beta \in V_\alpha$ porque $\alpha \in V_{\alpha \oplus 1}$.
Si $\beta \in V_\alpha$, entonces $\beta \oplus 1 = rg(\beta) \leq \alpha$. Por lo tanto $\beta \in \alpha$. □

5.2. Axioma de Regularidad

A continuación presentaremos otro axioma de la teoría. Este nuevo axioma tiene como propósito formalizar nuestra idea intuitiva de que el universo $\mathcal{U}$ se forma en etapas. Estas etapas están indexadas por los ordinales.

Axioma de Regularidad:

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \ \exists y \ (y \in x \ \wedge \ x \cap y = \emptyset))$$

Teorema 5.2.1. *Los conjuntos regulares satisfacen el Axioma de Regularidad.*

Demostración. Sea $a \neq \emptyset$, a regular. Si $x \in a$, x es regular (Teorema 5.1.1) y $rg(x) < rg(a)$. Sea

$$b = \{\beta \in rg(a) : \text{existe } x \text{ en } a \text{ tal que } rg(x) = \beta\}.$$

Como a es no vacío, tampoco lo es b y tiene primer elemento. Sea γ el primer elemento de b. Existe $z \in a$ tal que $rg(z) = \gamma$. Si existiese $x \in z \cap a$, entonces sería $rg(x) \in b$ y $rg(x) < rg(z) = \gamma$, contradiciendo que γ sea el primer elemento de b. Por lo tanto debe ser $z \cap a = \emptyset$. □

Teorema 5.2.2. *El Axioma de Regularidad implica que todo conjunto transitivo sea regular.*

Demostración. Sea a un conjunto transitivo y no vacío. Sea

$$b = \{y \in a : \ y \text{ es regular } \}.$$

Para probar el teorema basta probar que $a \setminus b = \emptyset$, porque entonces todos los elementos de a serán regulares y por el Teorema 5.1.1 resultará que a es regular. Supongamos que $a \setminus b \neq \emptyset$. Por el Axioma de Regularidad existe $z \in a \setminus b$ tal que $z \cap a \setminus b = \emptyset$. Como a es transitivo, $z \subseteq a$, entonces $z \subseteq b$. Esto implica que todos los elementos de z son regulares y por lo tanto, que z es regular. Esto dice que $z \in b$ que es absurdo porque $z \in a \setminus b$. Como el absurdo provino de supone que $a \setminus b = \neq \emptyset$, debe ser $a \setminus b = \emptyset$. □

Teorema 5.2.3. *El Axioma de Regularidad vale si y sólo si todo conjunto es regular.*

Demostración. Supongamos primero que vale el axioma. Esto implica que todo conjunto transitivo es regular. Como a está incluido en su clausura transitiva T_a, a es un subconjunto de un conjunto regular. Luego del Teorema 5.1.1 se concluye la regularidad de a. El Teorema 5.2.1 completa la demostración. □

Los siguientes teoremas serán considerados en presencia del Axioma de Regularidad.

Teorema 5.2.4. *No existe una sucesión* $x = \{u_n\}_{n\in\omega}$ *tal que* $u_{n\oplus 1} \in u_n$ *para todo* n.

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $x = \{u_n\}_{n\in\omega}$ tal que $u_{n\oplus 1} \in u_n$ para todo n. Sea $v = img(x)$. Si $y \in v$ entonces $y = u_n$ para algún n, y tenemos que $u_{n\oplus 1} \in y \cap v$. Por lo tanto para todo $y \in v$, $y \cap v \neq \emptyset$ en contradicción del Axioma de Regularidad. □

Corolario 5.2.5. *No existe un conjunto* $x = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *tal que* $x_0 \in x_1 \in ... \in x_n \in x_0$.

Corolario 5.2.6. *No existe* a *tal que* $a \in a$.

Teorema 5.2.7. *Si* $x \neq \emptyset$ *es transitivo, entonces* $\emptyset \in x$.

Demostración. Existe $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$, pero $y \subseteq x$ por ser x transitivo, por lo tanto $y = y \cap x = \emptyset$. □

El siguiente teorema muestra como se simplifica la definición de ordinal en presencia del Axioma de Regularidad.

Teorema 5.2.8. *El conjunto* a *es ordinal si y sólo si* a *es transitivo y para todo* x *e* y *en* α *se cumple* $(x \in y) \vee (x = y) \vee (y \in x)$.

Demostración. Si a es ordinal, entonces por definición se satisfacen las condiciones pedidas.

Para mostrar la otra implicación, como por hipótesis a es transitivo, hay que probar que se cumplen las condiciones que garantizan que $\in$ sea un buen orden estricto sobre a. Ord_1 se cumple pues $\forall x(x \notin x)$. Sean $x, y, z \in a$ tales que $x \in y$ e $y \in z$. Por hipótesis, $(x \in z) \vee (z \in x)$. Si fuese $z \in x$, tendríamos que $x \in y \in z \in x$, en contradicción con el Corolorario 5.2.5. Por consiguiente debe ser $x \in z$, lo que prueba Ord_1. Para probar Ord_2, sea $b \subseteq a$, $b \neq \emptyset$. Existe $z \in b$ tal que $z \cap b = \emptyset$. Si existiese $x \in b$ tal que $x \in z$, tendríamos que $x \in z \cap b$. Luego para todo x en b debe ser $(z = x) \vee (z \in x)$, lo que muestra que z es el primer elemento de b. Esto prueba que también se satisface Ord_2. □

5.3. Negación del Axioma de Regularidad

Vimos en el Capítulo 1 que del Axioma Esquema de Especificación resulta que para todo conjunto a existe un conjunto b tal que $b \notin a$ y por consiguiente que no puede existir un conjunto que contenga a todos los conjuntos, evitando así la Paradoja de Russell. Por otra parte, el Axioma de Regularidad prohíbe la existencia de conjuntos que sean elementos de sí mismos. Nos proponemos mostrar en esta sección que el sistema ZFC es compatible con la existencia de conjuntos a tales que $a \in a$.

Para ello vamos a definir una "relación" $\in^*$ en el universo $\mathcal{U}$ de modo que en sistema $(\mathcal{U}, \in^*)$ se satisfagan los axiomas de ZFC y exista un conjunto a tal que $a \in^* a$. Es decir, serán satisfechos simultáneamente los axiomas de ZFC y la negación del Axioma de Regularidad.

Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos con dos variables libres satisfaciendo las siguientes condiciones:

P_1 $\forall x \forall y \forall z((\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z)) \rightarrow y = z$,

P_2 $\forall x \forall y \forall z((\varphi(x, z) \wedge \varphi(y, z)) \rightarrow x = y$,

P_3 $\forall x \exists y \varphi(x, y)$,

P_4 $\forall y \exists x \varphi(x, y)$.

De acuerdo con la propiedad P_1, para todo x definimos $F(x)$ como el único y tal que $\varphi(x, y)$. Esto es, $\varphi(x, F(x))$ es verdadera. Análogamente, por P_2 para todo y podemos definir $F^{-1}(y)$ como el único x tal que $\varphi(x, y)$, esto es $\varphi(F^{-1}(y), y)$ es verdadera. Por P_3 y P_4 podemos pensar a F como una "biyección" del universo $\mathcal{U}$ en si mismo, y a F^{-1} como su inversa. Claramente se tiene que:

$$\forall y F(F^{-1}(y)) = y \text{ y } \forall x F^{-1}(F(x)) = x \tag{5.6}$$

En el universo $\mathcal{U}$ definimos una relación $\in^*$ del modo siguiente:

$$\forall x \forall y (x \in^* y \leftrightarrow x \in F(y)).$$

Debemos modificar las fórmulas del lenguaje de primer orden definido en el Capítulo 1 sustituyendo el símbolo $\in$ por el nuevo símbolo $\in^*$. Precisamente, dada una fórmula φ, definiremos la fómula $\varphi*$ por inducción en la complejidad de φ. Si $comp(\varphi) = 0$, entonces φ es de la forma $(x \in y)$ o $(x = y)$, donde x, y son variables. Definimos $(x \in y)^* = (x \in^* y)$ y $(x = y)^* = (x = y)$. Supongamos ahora que $comp(\varphi) = n > 0$ y que hemos definido $\psi*$ para toda fórmula ψ tal que $comp(\psi) < n$. Entonces se puede dar uno (y sólo uno) de los casos siguientes:

1. $\varphi = \neg\psi$. En este caso debe ser $comp(\psi) = n - 1$, y usando la hipótesis inductiva definimos $\varphi* = \neg\psi*$.

2. $\varphi = (\psi \wedge \eta)$. Como debe ser $comp(\psi) < n$ y $comp(\eta) < n$, aplicando la hipótesis inductiva definimos $\varphi* = (\psi * \wedge \eta*)$.

3. $\varphi = \exists x\psi$. Debe ser $comp(\psi) = n - 1$ y podemos definir $\varphi* = \exists x\psi*$.

Vamos a probar ahora que si ψ es una fórmula correspondiente a un axioma de ZFC, entonces ψ^* es verdadera en $(\mathcal{U}, \in^*)$. Esto mostrará que $(\mathcal{U}, \in^*)$ es un modelo de ZFC. Después, veremos que eligiendo una F conveniente, obtendremos un modelo de ZFC que satisface la negación del Axioma de Regularidad.

Extensionalidad. Para ver que

$$\forall x \ \forall y \ (\forall t \ (t \in^* x \leftrightarrow t \in^* y) \rightarrow (x = y))$$

es verdadera en $(\mathcal{U}, \in^*)$ observemos que teniendo en cuenta P_2 se tiene que

$$\forall t\ (t \in^* x \leftrightarrow t \in^* y) \leftrightarrow \forall t\ (t \in F(x) \leftrightarrow t \in F(y)) \leftrightarrow F(x) = F(y) \leftrightarrow x = y.$$

Conjunto vacío. Sea $\emptyset^* = F^{-1}(\emptyset)$. De la definición de $\in^*$ resulta que

$$\forall x \neg\ (x \in^* \emptyset^*).$$

Unión. Sea a un conjunto y sea $\cup^* a = F^{-1}(\bigcup_{y \in F(a)} F(y))$. Es fácil ver que

$$\forall t\ (t \in^* \cup^*(a) \leftrightarrow \exists y\ (y \in^* a \wedge t \in^* y).$$

Conjunto Potencia. Sea a un conjunto. Observemos que

$$x \subseteq^* a \leftrightarrow \forall t\ (t \in^* x \rightarrow t \in^* a) \leftrightarrow$$

$$\forall t\ (t \in F(x) \rightarrow t \in F(a) \leftrightarrow (F(x) \subseteq F(a)) \leftrightarrow (F(x) \in \mathcal{P}(F(a))).$$

Por el Axioma de Sustitución, $\{F^{-1}(y) : y \in \mathcal{P}(a)\} = \{x : F(x) \in \mathcal{P}(a)\}$ es un conjunto. Sea $\mathcal{P}^*(a) = F^{-1}(\{x : F(x) \in \mathcal{P}(a)\}$. Resulta que $x \subseteq^* a \leftrightarrow x \in^* \mathcal{P}^*(a)$.

Sustitución Sea a un conjunto y $\psi(x, y)$ una fórmula tal que $\psi^*(x, y)$ define una relación funcional sobre a:

$$(\forall x\ (x \in^* a \rightarrow \exists!\ y\ \psi^*(x, y))) \leftrightarrow (\forall x\ (x \in F(a) \rightarrow \exists!\ y\ \psi^*(x, y))).$$

Por el Axioma de Sustitución en $(\mathcal{U}, \in)$,

$$\{y : \exists x \in^* a\ (\psi^*(x, y))\} = \{y : \exists x \in F(a)\ (\psi^*(x, y))\}$$

es un conjunto.

Como el Axioma de Sustitución es válido en $(\mathcal{U}, \in^*)$, también son válidos los axiomas de **Especificación** y de **Existencia del Par**.

Infinito. Sea la "función"S definida en $\mathcal{U}$ por

$$S(x) = \begin{cases} \emptyset^* & \text{si } x = 0, \\ F(x(n)) \cup \{x(n)\} & \text{si } x \text{ es función y dom(x) = n + 1,} \\ \emptyset & \text{si no se cumplen las condiciones anteriores.} \end{cases}$$

Por recurrencia definimos la función f con $dom(f) = \omega$ satisfaciendo $f(n) = S(f|_n)$. Entonces se tiene que $f(0) = \emptyset^*$ y $f(n+1) = F(f(n)) \cup \{f(n)\}$.

Observemos que $x \in f(n+1) \leftrightarrow x \in^* f(n) \vee x = f(n)$, lo que significa que $f(n+1) = f(n)'^*$.

Por el Axioma de Sustitución $img(f)$ es un conjunto. Sea $\omega^* = F^{-1}(img(f))$, y veamos que ω^* es inductivo en $(\mathcal{U}, \in^*)$: $\emptyset^* \in^* \omega^*$ porque $\emptyset^* = f(0) \in img(f)$. Supongamos que $x \in^* \omega^*$. Entonces $x \in img(f)$ y por lo tanto $x = f(n)$ para algún $n \in \omega$. Luego $x'^* = f(n+1) \in img(f)$, lo que significa que $x'^* \in \omega^*$.

Elección. Sea a un conjunto que en $(\mathcal{U}, \in^*)$ es no vacío y cuyos elementos son no vacíos y disjuntos dos a dos. Esto es, a satisface:

I*) $a \neq \emptyset^*$,

II*) $\forall x((x \in^* a) \to \exists\, t\ (t \in^* x))$,

III*) $\forall x\ \forall y\ (((x \in^* a)\ \wedge\ (y \in^* a)\ \wedge\ (x \neq y)) \to (\forall z\ ((z \notin^* x) \vee (z \notin^* y))))$.

En $(\mathcal{U}, \in)$, las propiedades anteriores significan que a satisface las propiedades:

I) $a \neq \emptyset$,

II) $\forall x\ ((x \in F(a)) \to (F(x) \neq \emptyset))$,

III) $\forall x\ \forall\ y\ (((x \in F(a)) \wedge (y \in F(a)) \wedge (x \neq y)) \to (F(x) \cap F(y) = \emptyset))$.

Entonces, teniendo en cuenta el Axioma de Sustitución, resulta que $a_1 = \{F(x) : x \in F(a)\}$ es un conjunto no vacío de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Luego por el Axioma de Elección existe un conjunto b_1 tal que

$$\forall\ t\ \exists! y\ ((t \in a_1) \to ((y \in t) \wedge (y \in b_1)). \tag{5.7}$$

Como $(t \in a_1) \leftrightarrow \exists x\ ((x \in F(a)) \wedge (t = F(x)))$, (5.7) se puede escribir

$$\forall x\ \exists! y\ ((x \in F(a)) \to (y \in F(x)) \wedge (y \in b_1)).$$

Definiendo $b = F^{-1}(b_1)$, se tiene que

$$\exists\ b\ (\forall x\ \exists! y\ ((x \in^* a) \to ((y \in^* x) \wedge (y \in^* b)),$$

que es la formulación del Axioma de Elección en $(\mathcal{U}, \in^*)$.

Acabamos de ver que $(\mathcal{U}, \in^*)$ satisface los axiomas ZFC, cualquiera que sea la F definida a partir de una fórmula $\varphi(x, y)$ que satisfaga las propiedades $P_1 - P_4$.

Sea

$$\varphi(x, y) = (x = 0 \to y = 1) \wedge (x = 1 \to y = 0) \wedge ((x \neq 0) \wedge (x \neq 1)) \to (x = y).$$

Es claro que φ satisface $P_1 - P_4$ y la F correspondiente está definida para todo x como

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x = 1, \\ x & \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq 1. \end{cases}$$

Como $0 \in F(0) = 1 = \{0\}$, resulta que $0 \in^* 0$ y del Corolario 5.2.6 resulta que el Axioma de Regularidad es falso en $(\mathcal{U}, \in^*)$ para esta elección de $\in^*$.

En particular, resulta que la existencia de conjuntos que sean elementos de sí mismos es compatible con la axiomática ZFC.

5.4. Ejercicios

Ejercicio 5.4.1. *Usando las definiciones del Ejercicio 2.6.12 probar que:*

1. *Si a es un conjunto regular, entonces $\in$ es bien fundada sobre a.*
2. *Si $\in$ es bien fundada sobre un conjunto transitivo a, entonces a es regular.*

Ejercicio 5.4.2. *Sea $\in^*$ la pertenencia definida por una "función" F determinada por una fórmula que satisface las propiedades $P_1 - P_4$ consideradas en §5.3. Pruebe que:*

1. $x \cap^* y = F^{-1}(F(x) \cap F(y))$,
2. $\{x, y\}^* = F^{-1}(\{x, y\})$,
3. $\{x\}^* = F^{-1}(\{x\})$,
4. $\langle x, y\rangle^* = F^{-1}(\langle x, y\rangle)$.