Capítulo 6

Modelos

En este capítulo veremos ejemplos de como demostrar la independencia de un axioma o su consistencia relativa a los otros. Si A es un sistema de axiomas:

1. A^+ es el sistema de axiomas formado por los axiomas de A más el Axioma de Regularidad.

2. AC es el sistema de axiomas formado por los axiomas de A más el Axioma de Elección.

Por ejemplo, ZFC^+ indica el sistema formado por los axiomas de ZF más los Axioma de Elección y Regularidad.

6.1. La clase $\mathcal{V}$

Recordemos que para cada ordinal α V_α es un conjunto transitivo (Teorema 5.1.4) y que $\mathcal{V}$, la clase de los conjuntos regulares, es una clase transitiva (Teorema 5.1.5). Formalmente, $\mathcal{V}$ está definida por la fórmula:

$$\exists y\ (Ord(y) \wedge (x \in V_y)).$$

Uno de nuestros objetivos será mostrar que $\mathcal{V}$ es un modelo de ZFC^+ con respecto a ZFC, esto significa que partiendo de los axiomas de ZFC, podemos construir una clase en la cual los enunciados de los axiomas de ZFC restringidos y el enunciado del axioma de regularidad son verdaderos.

La siguiente definición va a precisar el sentido en que un axioma se verifica en una clase.

Definición 6.1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una clase y φ una fórmula. Definiremos $\varphi^{\mathcal{C}}$ por inducción en la complejidad de φ como sigue:*

I) *Si φ es atómica, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = \varphi$,*

II) *si* $\varphi = \neg\psi$*, entonces* $\varphi^{\mathcal{C}} = \neg\varphi^{\mathcal{C}}$*,*

III) *si* $\varphi = (\eta \ \wedge \psi)$*, entonces* $\varphi^{\mathcal{C}} = (\eta^{\mathcal{C}} \ \wedge \psi^{\mathcal{C}})$*,*

IV) *si* $\varphi = \exists x \ \psi$*, entonces* $\varphi^{\mathcal{C}} = \exists x \ (\mathcal{C}(x) \wedge \psi^{\mathcal{C}})$*.*

La fórmula $\varphi^{\mathcal{C}}$ *se dice la* ***restricción*** *de* φ *a la clase* $\mathcal{C}$*.*

De la definición del cuntificador universal en términos del existencial y la negación se tiene que:

$$\text{Si } \ \varphi = \forall x \ \psi(x), \ \text{ entonces } \ \varphi^{\mathcal{C}} = \forall x \ (\mathcal{C}(x) \to \psi^{\mathcal{C}}(x)). \tag{6.1}$$

A continuación obtendremos algunos resultados relacionados con clases transitivas. Dado que $\mathcal{V}$ es transitiva, estos resultados se aplican a $\mathcal{V}$ como caso particular.

Diremos que una clase $\mathcal{C}$ satisface un axioma A, cuando la restricción a $\mathcal{C}$ del enunciado de A es verdadero.

Teorema 6.1.1. *Cualquier clase transitiva satisface el Axioma de Extensionalidad.*

Demostración. El Axioma de Extensionalidad es

$$\forall x \ \forall y \ (\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y) \to x = y).$$

El axioma restringido a $\mathcal{C}$ toma la forma

$$\forall x \ \forall y \ \{\mathcal{C}(x) \wedge \mathcal{C}(y) \to [\forall t \ (\mathcal{C}(t) \to (t \in x \leftrightarrow t \in y)) \to x = y]\}.$$

Sean x e y en $\mathcal{C}$ tales que $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe t tal que $t \in x$ y $t \notin y$. Como $\mathcal{C}$ es transitiva y $t \in x$, tenemos $\mathcal{C}(t)$; es decir, t está en la clase.

Luego s dos conjuntos en $\mathcal{C}$ son distintos hay al menos un elemento de $\mathcal{C}$ que está en uno pero no en el otro. Por lo tanto si dos conjuntos de la clase $\mathcal{C}$ tienen los mismos elementos de $\mathcal{C}$ deben ser iguales y esto es lo que afirma el Axioma de Extensionalidad restringido a $\mathcal{C}$. □

Teorema 6.1.2. *Si* $\mathcal{C}$ *es una clase transitiva tal que* $\mathcal{C}(x) \to \mathcal{C}(\mathcal{P}(x))$*, entonces el Axioma de Especificación vale en* $\mathcal{C}$*.*

Demostración. El Esquema de Especificación relativo a $\mathcal{C}$, aplicado a una fórmula φ, es el enunciado

$$\forall x \ \{\mathcal{C}(x) \to \exists y \ [\mathcal{C}(y) \ \wedge \ (\forall t \ (\mathcal{C}(t) \to (t \in x \ \wedge \ \varphi^{\mathcal{C}}(t) \ )) \ \leftrightarrow \ t \in y)]\}.$$

El conjunto

$$y = \{t \in x : \ \varphi^{\mathcal{C}}(t)\} \in \mathcal{P}(x).$$

Como por hipótesis $\mathcal{P}(x)$ está en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es transitiva, resulta que y está en $\mathcal{C}$, lo que significa que el Axioma de Extensionalidad relativo a $\mathcal{C}$ se cumple en $\mathcal{C}$. □

Definición 6.1.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase y φ una fórmula con $x_0, ..., x_n$ como variables libres. Diremos que φ es **$\mathcal{C}$-absoluta** o que $\mathcal{C}$ **refleja** a φ si es verdadero el enunciado*

$$\forall x_0 \ ... \ \forall x_n \ [\mathcal{C}(x_0) \ \wedge \ ... \ \wedge \ \mathcal{C}(x_n) \ \rightarrow \ (\varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{C}})]$$

Esto es, una fórmula φ es $\mathcal{C}$-absoluta si los enunciados que resultan de asignar a las variables libres de $\varphi^{\mathcal{C}}$ y de φ los mismos elementos de $\mathcal{C}$, ambos son verdaderos o ambos son falsos. El siguiente ejemplo de una fórmula no absoluta ayudará a comprender el concepto.

Ejemplo 6.1.3. *Sea $\varphi(z) = \neg(\exists x \ (x \in z))$ y consideremos como clase al conjunto $s = \omega \setminus \{\emptyset\}$. Entonces $\varphi^s(z) = \neg\exists x(x \in s \wedge x \in z)$, y se tiene que $\varphi^s(1)$ es verdadero pero $\varphi(1)$ es falso. Por lo tanto el enunciado*

$$\forall z(z \in s \rightarrow (\varphi^s \leftrightarrow \varphi))$$

es falso y φ no es s-absoluta.

Resulta de la Definición 6.1.1 resulta que si φ no tiene cuantificadores, entonces $\varphi = \varphi^{\mathcal{C}}$ para cualquier clase $\mathcal{C}$. Por lo tanto si φ no tiene cuantificadores es trivialmente $\mathcal{C}$-absoluta para cualquier clase $\mathcal{C}$.

Definición 6.1.3. *Los cuantificadores en una fórmula se dicen **acotados** si son de la forma $\forall x \ (x \in y \ \rightarrow \ \psi(x))$ ó $\exists x \ (x \in y \ \wedge \ \psi(x))$.*

Lema 6.1.4. *Si $\mathcal{C}$ una clase transitiva, entonces toda fórmula φ sin cuantificadores no acotados es $\mathcal{C}$-absoluta.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción en la complejidad de las fórmulas. Si $comp(\varphi) = 0$, entonces no tiene cuantificadores y el resultado es trivial. Sea $comp(\varphi) = n > 0$ sin cuantificadores no acotados y supongamos que todas las fórmulas de complejidad menos que n sin cuantificadores no acotados sean $\mathcal{C}$-absolutas. Si $\varphi = \neg\psi$ o $\varphi = (\psi \wedge \eta)$, entonces ψ y η tienen complejidad menor que n y no pueden tener cuantificadores no acotados. Luego, por la hipótesis inductiva deben ser $\mathcal{C}$-absolutas, y se ve fácilmente que esto implica que también φ es $\mathcal{C}$-absoluta.

Si $\varphi(y_0, \ldots, y_n, z) = \exists x(x \in z)\psi(x, y_0, \ldots, y_n, z)$, para probar que φ es $\mathcal{C}$-absoluta debemos probar que el siguiente enunciado es verdadero:

$$\forall y_0 \cdots \forall y_n \forall z(\mathcal{C}(y_0) \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}(y_n) \wedge \mathcal{C}(z) \rightarrow$$
$$[\exists x(\mathcal{C}(x) \wedge x \in z \wedge \psi^{\mathcal{C}}(x, y_o, \ldots, y_n, z)) \leftrightarrow \exists x(x \in z \wedge \psi(x, y_0, \ldots, y_n, z))].$$

Como $\mathcal{C}$ es transitiva y $z \in \mathcal{C}$, debe ser $x \in \mathcal{C}$, luego la condición $\mathcal{C}(x)$ es superflua, y el enunciado anterior puede escribirse:

$$\forall y_0 \cdots \forall y_n \forall z(\mathcal{C}(y_0) \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}(y_n) \wedge \mathcal{C}(z) \rightarrow$$
$$[\exists x(x \in z \wedge \psi^{\mathcal{C}}(x, y_o, \ldots, y_n, z)) \leftrightarrow \exists x(x \in z \wedge \psi(x, y_0, \ldots, y_n, z))].$$

que resulta verdadero, ya que por la hipótesis inductiva ψ debe ser $\mathcal{C} - absoluta$.

□

Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula que permita definir una relación funcional $y = F(x)$, esto es, que $\forall x\ \exists! y\ \varphi(x, y)$.

Definición 6.1.4. *Diremos que la* ***relación funcional*** *F es* ***$\mathcal{C}$-absoluta*** *cuando está definida por una fórmula φ $\mathcal{C}$-absoluta que satisface la condición de existencia y unicidad en $\mathcal{C}$:*

$$\forall x\ [\mathcal{C}(x) \to \exists! y\ ((\mathcal{C}(y)\ \wedge\ \varphi^{\mathcal{C}}(x, y)))].$$

De la definición anterior resulta que si F es una relación funcional $\mathcal{C}$-absoluta, entonces $F^{\mathcal{C}}(x) = F(x)$ para todo x en la clase $\mathcal{C}$.

De acuerdo con el Lemma 6.1.4 si queremos ver que dada una clase transitiva $\mathcal{C}$ la fórmula φ es $\mathcal{C}$-absoluta, bastará escribir una fórmula equivalente a ella donde los cuantificadores aparezcan acotados. Esto es lo que haremos en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 6.1.5. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface los axiomas de Especificación, Par y Unión; entonces las siguientes fórmulas y relaciones funcionales son $\mathcal{C}$-absolutas.*

a) $x \in y$

b) $x = y$

c) $x \subset y$

d) $\{x, y\}$

e) $\{x\}$

f) $\langle x, y\rangle$

g) $\emptyset$

h) $x \cup y$

i) $x \cap y$

j) $x \setminus y$

k) x'

l) $Trans(x)$

m) $\cup x$

n) $\cap x$

Demostración. *a)* y *b)* son triviales por ser fórmulas atómicas.
c) La fórmula $\forall t\ (t \in x \to t \in y)$ tiene todos sus cuantificadores acotados y $\mathcal{C}$ es transitiva; por lo tanto es $\mathcal{C}$-absoluta.

l) $Trans(x)$ es la fórmula $\forall y\ (y \in x\ \rightarrow\ \forall z\ (z \in y\ \rightarrow\ z \in x))$ en la que todos los cuantificadores aparecen acotados.

Por hipótesis, los conjuntos definidos por las fórmulas funcionales $\{x, y\}^{\mathcal{C}}$, $\{x\}^{\mathcal{C}}$, $\langle x, y\rangle^{\mathcal{C}}$, $\emptyset^{\mathcal{C}}$, $(x \cup y)^{\mathcal{C}}$, $(x \cap y)^{\mathcal{C}}$, $(x \setminus y)^{\mathcal{C}}$, $(x')^{\mathcal{C}}$ existen. Resta ver que coinciden con su correspondiente no relativo. Para ello escribiremos las respectivas fórmulas que los definen de manera que los cuantificadores queden acotados, lo que implica que las fórmulas sean $\mathcal{C}$-absolutas.

d) $z = \{x, y\}$ si y sólo si $y \in z\ \wedge\ x \in z\ \wedge\ \forall t\ (t \in z\ \rightarrow\ (t = x\ \vee\ t = y))$.

e) Este es un caso particular de *d)*

f) $z = \langle x, y\rangle$ si y sólo si

$$\exists s\ (s \in z \wedge\ s = \{x\})\ \wedge \exists s\ (s \in z \wedge\ s = \{x, y\}) \wedge$$

$$\forall s (s \in z\ \rightarrow\ (s = \{x\}\ \vee\ s = \{x, y\}).$$

g) Podemos decir que $z = \emptyset$ si y sólo si $\forall t\ (t \in z \rightarrow t \neq t)$.

h) $z = x \cup y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in z \rightarrow (t \in x\ \vee\ t \in y))\ \wedge x \subset z\ \wedge\ y \subset z$.

i) $z = x \cap y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in x\ \rightarrow\ (t \in y\ \rightarrow t \in z))\ \wedge z \subset y\ \wedge\ z \subset x$.

j) $z = x \setminus y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in x\ \rightarrow (t \notin y\ \rightarrow t \in z))\ \wedge\ z \subset x\ \wedge\ z \cap y = \emptyset$.

k) Que $x' = x \cup \{x\}$ es consecuencia de *e)* y *h)*.

m) $y = \cup x$ si y sólo si $\forall s\ (s \in x\ \rightarrow\ s \subset y)\ \wedge \forall t\ (t \in y\ \rightarrow\ \exists s\ (s \in x\ \wedge\ t \in s))$.

n) $y = \cap x$ si y sólo si

$$\forall t\ (t \in x\ \rightarrow\ y \subset t) \wedge \exists s_0\ \{s_0 \in x \wedge \forall t\ [t \in s_0\ \rightarrow\ (\forall s\ (s \in x\ \rightarrow t \in s))] \rightarrow t \in y\}.$$

$\square$

Teorema 6.1.6. *En las mismas hipótesis del teorema anterior, las siguientes fórmulas y relaciones funcionales son $\mathcal{C}$-absolutas.*

a) *z es un par ordenado*

b) $a \times b$.

c) *r es una relación*

d) $dom(r)$

e) $img(r)$

f) *f es función*

g) *$f(x)$ (ser imagen del elemento x por una función f)*

h) *f es función inyectiva*

Demostración. Observemos que si $\varphi(x,y)$ es $\mathcal{C}$-absoluta, y la relación funcional $y = F(s,t)$ es $\mathcal{C}$-absoluta, entonces la fórmula $\psi(x,s,t)$ dada por $\varphi(x, F(s,t))$ resulta $\mathcal{C}$-absoluta, puesto que a $\psi(x,s,t)$ podemos escribirla como $\varphi(x,y) \ \wedge \ (y = F(s,t))$ que es $\mathcal{C}$-absoluta.

Usando el teorema anterior, escribiremos las fórmulas de forma tal que los cuantificadores queden acotados, y algunas de las variables que aparezcan libres sean reemplazadas por relaciones funcionales $\mathcal{C}$-absolutas.

a) La fórmula que dice que "z es un par ordenado"puede expresarse como

$$\exists x \ (x \in t \ \wedge \ t = \cup z) \ \wedge \ \exists y \ (y \in s \ \wedge \ s = \cup z) \ \wedge \ z = \langle x, y \rangle.$$

Por el teorema anterior las relaciones funcionales $\langle x, y \rangle$ y $\cup z$ son $\mathcal{C}$-absoluta; además los cuantificadores están acotados, por lo tanto la fórmula es $\mathcal{C}$-absoluta.

b) $c = a \times b$ si y sólo si

$$\forall x \ \forall y \ [(x \in a \wedge y \in b) \ \rightarrow \ \langle x, y \rangle \in c] \ \wedge$$

$$\forall z \ [z \in c \ \rightarrow \ \exists x \ \exists y \ (x \in a \ \wedge \ y \in b \ \wedge \ z = \langle x, y \rangle)].$$

En esta fórmula, todos los cuantificadores están acotados.

c) "r es una relación" si y sólo si $\forall x \ (x \in r \ \rightarrow \ x$ "es un par ordenado"). Los cuantificadores están acotados y "es un par ordenado" es $\mathcal{C}$-absoluta.

d) $a = dom(r)$ si y sólo si

$$\forall x \ [x \in a \ \rightarrow \ \exists y \ (y \in \cup \cup r \ \wedge \ \langle x, y \rangle \in r)] \ \wedge$$

$$\forall x \ \forall y [(x \in \cup \cup r \ \wedge \ y \in \cup \cup r \ \wedge \langle x, y \rangle \in r) \ \rightarrow \ x \in a].$$

e) $b = img(r)$ si y sólo si

$$\forall y \ (y \in b \ \rightarrow \ \exists x \ (x \in \cup \cup r \ \wedge \ \langle x, y \rangle \in r)] \ \wedge$$

$$\forall x \ \forall y [(x \in \cup \cup r \ \wedge \ y \in \cup \cup r \ \wedge \langle x, y \rangle \in r) \ \rightarrow \ y \in b].$$

f) "f es función" si y sólo si

$$(f \text{ es relación }) \ \wedge \ \forall x \ \forall y \ \forall z$$

$$[(x \in \cup\cup f \ \wedge \ y \in \cup\cup f \ \wedge \ z \in \cup\cup f) \ \rightarrow (\langle x, y \rangle \in f \ \wedge \ \langle x, z \rangle \in f \ \rightarrow \ y = z)].$$

g) $y = f(x)$ si y sólo si $\exists s \ (s \in f \ \wedge \ s = \langle x, y \rangle)$.
"f es función inyectiva"si y sólo si

$$(f \text{ es función }) \ \wedge \ \forall x \ \forall t$$

$$[(x \in dom(f) \ \wedge \ t \in dom(f)) \ \rightarrow \ (f(x) = f(t) \ \rightarrow \ x = t)].$$

$\square$

Teorema 6.1.7. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface los axiomas de Especificación, Par, Unión y Potencia. Sean a y r conjuntos en la clase $\mathcal{C}$ y supongamos que r es un buen orden sobre a y que la fórmula que dice esto es $\varphi(a,r)$. Entonces la fórmula restringida $\varphi(a,r)^{\mathcal{C}}$ es verdadera.*

Demostración. La fórmula $\varphi(a,r)$ puede ser escrita como

$$[(r \subset a \times a) \ \wedge \ orden(a,r) \ \wedge \ bueno(a,r)],$$

donde $orden(a,r)$ es la fórmula

$$\forall x \in a \ \forall y \in a \ \forall z \in a \ [\langle x,x\rangle \in r \wedge \langle x,y\rangle \in r \ \wedge \ \langle y,z\rangle \in r) \rightarrow (\langle x,z\rangle \in r) \wedge$$
$$((\langle x,y\rangle \in r \wedge \langle y,x\rangle \in r) \rightarrow x = y)]$$

que dice que r es un orden sobre a y $bueno(a,r)$ es

$$\forall x\{x \in \mathcal{P}(a) \ \wedge \ x \neq \emptyset \ \ \rightarrow \ \exists y \ [(y \in x) \wedge \forall t \ (t \in x \rightarrow \ \langle y,t\rangle \in r)]\},$$

la fórmula que dice que r es un buen orden.

Bajo estas hipótesis sobre $\mathcal{C}$, todas estas fórmulas, que definen buen orden, son $\mathcal{C}$-absolutas puesto que todos los cuantificadores en ellas se encuentran acotados y las fórmulas funcionales que aparecen son $\mathcal{C}$-absolutas. Por lo tanto $\varphi(a,r)$ es $\mathcal{C}$-absoluta. $\square$

Teorema 6.1.8. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface los axiomas de Especificación, Par, Unión y Potencia. Si ω está en la clase $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ satisface el Axioma del Infinito.*

Demostración. El Axioma del Infinito relativo a $\mathcal{C}$ es

$$\exists x \ \{\mathcal{C}(x) \ \wedge \ [\emptyset^{\mathcal{C}} \in x \ \wedge \ \forall t \ (\mathcal{C}(t) \ \rightarrow \ \ t \in x \ \rightarrow \ (t')^{\mathcal{C}} \in x)]\}. \tag{6.2}$$

Como se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.5, resulta que $\emptyset^{\mathcal{C}} = \emptyset$ y $(t')^{\mathcal{C}} = t'$, y como $\mathcal{C}(\omega)$ es verdadero, tenemos que ω hace verdadero el enunciado (6.2). $\square$

Teorema 6.1.9. *Si α es un ordinal límite, entonces V_α satisface los axiomas de Extensionalidad, Especificación, Conjunto Vacío, Par , Unión, Potencia, Regularidad, Elección. Además, si $\alpha > \omega$, entonces V_α satisface el Axioma del Infinito.*

Lo anterior afirma que si $\alpha > \omega$, entonces V_α es un modelo de ZC$^+$.

Demostración. Sea α un ordinal límite. Por el Teorema 5.1.4, V_α es transitivo (como conjunto), por lo tanto transitiva como clase. El Teorema 6.1.1 afirma entonces que V_α satisface Extensionalidad. Si usamos el Corolario 5.1.7 y tenemos en cuenta que V_α es transitivo, es fácil comprobar que V_α satisface los axiomas de Unión, Par y Potencia.

Nos encontramos en las hipótesis del Teorema 6.1.2, por lo tanto V_α satisface Especificación.

El Axioma del Conjunto Vacío se satisface porque $\emptyset \in V_\alpha$.

Para ver que V_α satisface Axioma de Elección, mostraremos que V_α satisface el Principio de Buena Ordenación.

Sea a un conjunto en V_α; este conjunto puede ser bien ordenado y sea r un buen orden para a. Tenemos que $r \subset a \times a \in V_\alpha$ y de esta manera nos hallamos en las hipótesis del Teorema 6.1.7, entonces V_α satisface el Principio de Buena Ordenación.

El Axioma de Regularidad vale en V_α por construcción.

La última afirmación es consecuencia del teorema 6.1.8. □

Teorema 6.1.10. *$\mathcal{V}$ es un modelo de ZFC$^+$.*

Demostración. La clase $\mathcal{V}$ es transitiva por el Teorema 5.1.5, por lo tanto satisface Extensionalidad. Además, por el Teorema 5.1.6, si x está en $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{P}(x)$, y $\cup x$ también; por lo tanto satisface los axiomas de Potencia y Unión. El Axioma de Regularidad es verdadero en $\mathcal{V}$ por construcción. El Axioma de Elección sería verdadero en $\mathcal{V}$ si fuera verdadero el de Sustitución, porque este último implica Especificación y con esto estamos en las hipótesis del Teorema 6.1.7. Por lo tanto, sólo resta ver que $\mathcal{V}$ satisface Sustitución.

Sea φ una fórmula con la variables y_1, ..., y_n, x, y libres. En palabras, el Axioma Esquema de Sustitución relativo a $\mathcal{V}$ afirmaría que: si a es un conjunto regular tal que para cada $x \in a$ existe un único conjunto regular y que hace $\varphi(x,y)^{\mathcal{V}}$ verdadera, entonces existe un conjunto regular

$$b = \{y : \exists x \ (x \in a \ \wedge \ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}})\}^{\mathcal{V}}[1].$$

Veamos que la afirmación es cierta. Consideremos la fórmula $\psi(x,y)$ dada por $\varphi(x,y)^{\mathcal{V}} \ \wedge \ \mathcal{V}(y)$. Tenemos que ψ define una relación funcional. Luego, por el Axioma Esquema de Sustitución, existe un conjunto

$$b = \{y : \ \exists x \ (x \in a \ \wedge \ \psi(x,y))\} = \{y : \ \exists x \ (x \in a \ \wedge \ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}} \ \wedge \mathcal{V}(y))\} =$$

$$\{y : \ \exists x \ (x \in a \ \wedge \ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}}) \ \wedge \mathcal{V}(y)\} = \{y : \ \exists x \ (x \in a \ \wedge \ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}})\}^{\mathcal{V}}.$$

Por lo tanto basta ver que b es regular; pero esto es consecuencia del Teorema 5.1.1, ya que todos los elementos de b son regulares. □

Teorema 6.1.11. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva tal que $\mathcal{C}(x)$ y $\mathcal{C}(x)$ implica $\mathcal{C}(\mathcal{P}(x))$, $\mathcal{C}(\cup x)$ y $\mathcal{C}(\{x,y\})$. Entonces las fórmulas $Ord(x)$ y $Card(x)$ son $\mathcal{C}$-absolutas.*

Demostración. Para ver que “ser ordinal” es $\mathcal{C}$-absoluta, por la Definición 2.3.3 debemos ver que $Trans(x)$, Ord_1, Ord_2 y Ord_3 son $\mathcal{C}$-absolutas. Sabemos que bajo las hipótesis del enunciado $\mathcal{C}$ satisface Extensionalidad y Especificación.

[1] Notar que si $\varphi(x)$ es una fórmula con la variable x libre y $\mathcal{C}$ es un clase la fórmula $\{x : \ \varphi(x)\}^{\mathcal{C}}$ es equivalente a $\{x : \varphi(x) \ \wedge \ \mathcal{C}(x)\}$; esto es, la clase de los x que satisfacen $\varphi(x)$ y que están en la clase $\mathcal{C}$.

Como $\mathcal{C}$ es transitiva y satisface Extensionalidad, Par y Unión, por el Teorema 6.1.5 $Trans(x)$ es $\mathcal{C}$ absoluta.

En Ord_1 y Ord_2 los cuantificadores están acotados, y como $\mathcal{C}$ es transitiva, se sigue que estas dos fórmulas son $\mathcal{C}$-absolutas.

Resta probar que Ord_3 es $\mathcal{C}$-absoluta, o sea que la fórmula

$$\forall u\ \{(u \subset a\ \wedge\ u \neq \emptyset)\ \rightarrow\ \exists z\ [z \in u\ \wedge\ \forall x\ (x \in u\ \wedge\ x \neq\ z\ \rightarrow\ z \in x)]\}$$

y su restirngida a $\mathcal{C}$,

$$\forall u\ \{\mathcal{C}(u)\ \rightarrow [(u \subset x\ \wedge\ u \neq \emptyset^{\mathcal{C}})\ \rightarrow$$

$$\exists z\ [\mathcal{C}(z)\ \wedge\ z \in u\ \wedge\ \forall t\ (\mathcal{C}(t)\ \rightarrow\ (t \in u\ \wedge\ t \neq\ z\ \rightarrow\ z \in t))]]\},$$

tienen el mismo valor de verdad cuando x está en la clase $\mathcal{C}$.

Por hipótesis, que x esté en la clase implica que $\mathcal{P}(x)$ también, por consiguiente si $u \subset x$, $u \in \mathcal{P}(x)$ y como $\mathcal{C}$ es transitiva u está en $\mathcal{C}$. Esto muestra que $\mathcal{C}(u)$ es redundante. En las demás partes de la fórmula, vemos que $\mathcal{C}(z)$ no varia la verdad de la fórmula porque $z \in u$ y u está en $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}(t)$ tampoco porque se toma $t \in u$. El Vacío restringido coincide con el Vacío, de acuerdo con el Teorema 6.1.5. Por lo tanto, todos los signos que se agregaron por la relativización son redundantes si suponemos que x está en la clase.

Hemos probado que $Ord(x)$ es $\mathcal{C}$-absoluta. Ahora veremos que la fórmula $Card(x)$ es $\mathcal{C}$-absoluta.

Primero veremos que si γ está en $\mathcal{C}$, $Card(\gamma)$ implica $Card(\gamma)^{\mathcal{C}}$. Supongamos que γ es un cardinal que está en la clase $\mathcal{C}$, entonces γ es un ordinal; por lo visto anteriormente γ es un ordinal relativo a $\mathcal{C}$. No existe una biyección de γ en cualquier ordinal menor. Como no hay ordinales relativos a $\mathcal{C}$ que no sean ordinales, tenemos que no hay biyección para los ordinales relativos a $\mathcal{C}$ menores que γ. Por lo tanto $Card(a)^{\mathcal{C}}$ es verdadera.

Supongamos que γ es un ordinal que no es cardinal. Entonces existe una biyección f de γ en un ordinal $\beta \in \gamma$. Como $f \subset \gamma \times \beta \subset \gamma \times \gamma$ y $\gamma \times \gamma$ está en $\mathcal{C}$, entonces f está en $\mathcal{C}$ por pertenecer a $\mathcal{P}(\gamma \times \gamma)$. Por otra parte, ser biyección es $\mathcal{C}$-absoluta por lo tanto γ tampoco es un cardinal relativo a $\mathcal{C}$. $\square$

Hemos usado el Axioma Esquema de Sustitución para probar que todo conjunto bien ordenado es similar a un ordinal (Teorema 3.2.3). El resultado siguiente muestra que ZC$^+$ no es suficiente para probarlo.

Teorema 6.1.12. *$V_{\omega\oplus\omega}$ es un modelo de ZC$^+$ en el que existen conjuntos bien ordenados no similares a un ordinal.*

Demostración. Como $\omega \oplus \omega$ es un orddinal límite, por el Teorema 6.1.9 sabemos que $V_{\omega\oplus\omega}$ es un modelo de ZC$^+$. Observemos que la relación de similaridad es $V_{\omega\oplus\omega}$-absoluta. En efecto, ser "función biyectiva" lo es, "preservar el orden" puede expresarse por una fórmula con todos sus cuantificadores acotados y la fórmula $f(x)$ (ser imagen de un x por una función) es $V_{\omega\oplus\omega}$-absoluta. Mostraremos ahora que existe un conjunto bien ordenado que no es similar a ningún ordinal.

Si r es un buen orden para ω, entonces $r \subset \omega \times \omega$; por el Teorema 5.1.6 $\mathcal{P}(\omega \times \omega) \in V_{\omega \oplus \omega}$ por lo tanto $r \in V_{\omega \oplus \omega}$. Por otra parte, por el Teorema 6.1.7 r es un buen orden relativo a $V_{\omega \oplus \omega}$. Consideremos el buen orden para ω dado por $x \preceq y$ si x es par e y impar, o si $x \leq y$ siendo ambos pares o ambos impares.Como $\omega \oplus \omega$ es el único ordinal similar a $(\omega, \preceq)$ y la similaridad es $V_{\omega \oplus \omega}$-absoluta, del Corolario 5.1.8 resulta que para que exista un ordinal en $V_{\omega \oplus \omega}$ similar a $(\omega, \preceq)$ debería ser $\omega \oplus \omega \in V_{\omega \oplus \omega}$, lo que es imposible por el Corolario 5.1.3. $\square$

6.2. Cardinales fuertemente inaccesibles

En lo que sigue λ denotará un cardinal que satisface las dos condiciones siguientes:

I_1 si γ es un cardinal y $\gamma < \lambda$, $2^\gamma < \lambda$,

I_2 si $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ es una familia de cardinales tal que $\gamma_i < \lambda$ para todo $i \in I$ y $card(I) < \lambda$, entonces $\sup_{i \in I} \gamma_i < \lambda$.

Observemos que ω satisface I_1 e I_2.

Lema 6.2.1. *Si λ satisface I_1 e I_2, entonces $card(V_\lambda) = \lambda$, y para todo conjunto a, a pertenece a V_λ) si y sólo si a es un subconjunto de V_λ y $card(a) < \lambda$.*

Demostración. Como $\lambda \subset V_\lambda$, entonces $\lambda = card(\lambda) \leq card(V_\lambda)$.

Observemos que si $\alpha < \lambda$, entonces $card(V_\alpha) < \lambda$. En efecto, supongamos que esto es falso, y sea α el primer ordinal menor que λ tal que $card(V_\alpha) \geq \lambda$.

$$card(V_\alpha) = card(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)) \leq \sum_{\beta<\alpha} card(\mathcal{P}(V_\beta)) =$$

$$\text{máx}\{card(\alpha)\ ,\ \sup_{\beta<\alpha} 2^{card(V_\beta)}\} < \lambda,$$

contradiciendo la elección de α.

De la definición se desprende que λ es límite. Luego, $V_\lambda = \bigcup_{\alpha \in \lambda} V_\alpha$, por consiguiente,

$$card(V_\lambda) = card(\bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha) = \sup_{\alpha\in\lambda} card(V_\alpha) \leq \lambda.$$

Para demostrar la otra parte, sea $a \in V_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha$. Entonces existe $\alpha \in \lambda$ tal que $a \in V_\alpha$, lo que implica que $card(a) \leq card(V_\alpha) < \lambda$. Para probar la recíproca, supongamos que $a \subset V_\lambda$ y $card(a) < \lambda$. Consideremos la función f definida sobre a y dada por $f(x) = card(rg(x))$. Tenemos que $f(x) < \lambda$ para todo $x \in a$ y además $card(a) < \lambda$, por lo tanto $\rho = \sup_{x\in a} f(x) < \lambda$. Si $x \in a$, $f(x) \leq \rho$, entonces $rg(x) < 2^\rho$ y tenemos que $x \in V_{2^\rho}$. De lo anterior se deduce que $a \in \mathcal{P}(V_{2^\rho}) = V_{2^\rho \oplus 1}$, y dado que $2^\rho \oplus 1 < \lambda$, tenemos $a \in V_\lambda$. $\square$

Lema 6.2.2. *Si λ satisface I_1 e I_2, entonces V_λ satisface el Axioma de Sustitución.*

Demostración. Supongamos que valen las hipótesis del Axioma de Sustitución relativo a V_λ; esto es, dada una fórmula $\varphi(x,y)$, para todo conjunto a en V_λ en el que $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$ sea funcional, es decir, para todo $x \in a$[2] existe un único $y \in V_\lambda$ tal que $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$. Lo que debemos ver es que existe un conjunto b en V_λ tal que tiene a todo y de V_λ tal que vale $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$ para algún x en a.

Por el Axioma de Sustitución existe el conjunto

$$b = \{y :\ \exists x\ (x \in a)\ \wedge\ (\varphi(x,y)^{V_\lambda})\}.$$

Tenemos que mostrar que b pertenece a V_λ.

Por hipótesis, si $x \in a$ y $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$, entonces $y \in V_\lambda$; por lo tanto $b \subset V_\lambda$.

Por otra parte, podemos construir una $f : a \to b$ sobreyectiva dada por $f(x) = y$ donde y es tal que $\varphi(x,y)^{V_\lambda}$.

Lo anterior dice que $card(b) \leq card(a)$. Como $a \in V_\lambda$, el Lema 6.2.1 implica que $card(a) < \lambda$, entonces $card(b) < \lambda$. Si usamos nuevamente el resultado del Lema 6.2.1 obtenemos que $b \in V_\lambda$ y con esto que el Axioma de Sustitución relativo a V_λ es verdadero. □

Con los Teorema 6.1.9 y 6.2.2 se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 6.2.3. *Si λ satisface I_1 e I_2 y $\lambda > \omega$, entonces V_λ es un modelo de ZFC$^+$.*

Teorema 6.2.4. *V_ω satisface los axiomas de ZFC$^+$ menos el Axioma de Infinito. Más precisamente, satisface que no existe un conjunto inductivo en V_ω.*

Demostración. Por los teoremas anteriores lo único que nos falta probar es que V_ω satisface la inexistencia de un conjunto inductivo relativo a V_ω. En la demostración del Teorema 6.1.8 vemos que $Ind(x)$ es V_α-absoluta para todo α, por lo tanto es equivalente decir "inductivo que pertenece a V_ω" o "inductivo relativo a V_ω". Supongamos que x pertenece a V_ω y x es inductivo. Como ω es un subconjunto de x y vale el Axioma de las Partes, $\omega \in \mathcal{P}(x) \in V_\omega$, y por ser V_ω transitivo tendríamos que $\omega \in V_\omega$ que es absurdo. □

Diremos que λ es un cardinal **fuertemente inaccesible** si $\lambda > \omega$ y satisface las propiedades I_1 y I_2.

Teorema 6.2.5. *Es imposible demostrar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles en la axiomática ZFC$^+$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un modelo de la teoría de conjuntos ZFC$^+$. Supongamos que existe un cardinal fuertemente inaccesible en $\mathcal{U}$. Sea π el primer cardinal fuertemente inaccesible.

Consideremos el conjunto V_π. Por el Teorema 6.2.3 este conjunto es un modelo de ZFC$^+$. Resta ver que no hay cardinales fuertemente inaccesibles relativos. Por el Teorema 6.1.11, todos los cardinales que pertenecen a V_π son cardinales relativos a V_π y biceversa. En V_π no hay cardinales fuertemente inaccesibles

[2] Aquí debería ir $x \in a \cap V_\lambda$, pero como V_λ es transitivo, $a = a \cap V_\lambda$.

porque $\pi \notin V_\pi$ y π es el primero. Por lo tanto, si $\gamma \in \pi$, entonces alguna de las condiciones de inaccesibilidad debe fallar, o sea, al menos una de las siguientes debe cumplirse y todas ellas conducen a que el cardinal tampoco sea inaccesible relativo a V_π:

1. $\gamma \leq \omega$, indica que γ tampoco es inaccesible relativo a V_π.

2. Existe $\beta \in \gamma$ tal que $2^\beta \geq \gamma$, y como $\beta \in V_\pi$ por el Lema 6.2.1 tenemos que $2^\beta \in V_\beta$; por consiguiente γ no es un cardinal fuertemente inaccesible relativo.

3. Existe una familia $\{\beta_i\}_{i\in I}$ tal que $card(I) < \gamma$ y para todo $i \in I$, $\beta_i < \gamma$, pero sin embargo $\gamma \leq \bigcup_{i\in I} \beta_i$. En este caso, la familia $\{\beta_i\}_{i\in I} \subset I \times \gamma \subset \gamma \times \gamma$ y $\gamma \times \gamma \in V_\pi$ por el Teorema 5.1.6. La familia pertenece a V_π por ser V_π transitivo y esto implica que γ tampoco puede ser fuertemente inaccesible relativo a V_π.

□

6.3. El teorema de la reflexión

En esta Sección veremos un resultado, probado en la década de los 60 del siglo pasado por Ricahard Montagne y Azriel Levi,que muestra como ciertas propiedades válidas en una clase de conjuntos se reflejan en una subclase, que puede ser un conjunto. Una consecuencia importante de este resultado es que los infinitos axiomas esquemas de ZFC$^+$ no pueden reemplazarse por un número finito de axiomas. Otras aplicaciones se verán en el capítulo siguiente.

Comenzaremos por un resultado preliminar.

Diremos que una lista de fórmulas $\phi_1 \ldots \phi_n$ es **cerrada por subfórmulas** sí, y sólo si, toda subfórmula de cualquier fórmula de la lista figura en $\phi_1 \ldots \phi_n$. Por ejemplo, cualquier cadena de formación de una fórmula es cerrada por subfórmulas.

Definición 6.3.1. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ clases tales que todo conjunto de la clase $\mathcal{M}$ está en la clase $\mathcal{N}$ (para abreviar, $\mathcal{M}$ "$\subseteq$" $\mathcal{N}$). Diremos que una fórmula $\varphi(x_0, \ldots, x_k)$ es $\mathcal{M},\mathcal{N}$-absoluta si*

$$\forall x_0 \forall x_1 \cdots \forall x_k [(\mathcal{M}(x_0) \ \wedge \ \mathcal{M}(x_1) \ \wedge \cdots \wedge \ \mathcal{M}(x_k)) \rightarrow$$

$$(\varphi^{\mathcal{M}}(x_0, \ldots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{N}}(x_0, \ldots, x_k))].$$

Observemos que las fórmulas $\mathcal{C}$-absolutas introducidas en la Definición 6.1.2 son $\mathcal{C},\mathcal{U}$-absolutas, donde $\mathcal{U}$ es el universo de la teoría de conjuntos.

Lema 6.3.1. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ clases tales $\mathcal{M}$ "$\subseteq$" $\mathcal{N}$. Si $\phi_1 \ldots \phi_n$ es una lista de fórmulas cerrada por subfórmulas, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para todo $1 \leq i \leq n$, ϕ_i es $\mathcal{M},\mathcal{N}$-absoluta.

(ii) Si ϕ_i es de la forma $\exists y \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k)$, entonces

$$\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_k [(\mathcal{M}(y_1) \ \wedge \ \mathcal{M}(y_2) \ \wedge \ \mathcal{M}(y_k)) \rightarrow$$

$$(\exists x(\mathcal{N}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1 \ldots, y_k)) \rightarrow \exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_k))].$$

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Fijemos $y_1, \ldots, y_n$ en $\mathcal{M}$ y supongamos que ϕ_i es de la forma $\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ y que $\exists x(\mathcal{N}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_n))$.

Entonces, $\phi_i^{\mathcal{N}}(y_1, \ldots, y_n)$ es verdadera, y por (i), $\phi_i^{\mathcal{M}}(y_1, \ldots, y_n)$ es verdadera. Luego es verdadera

$$\exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{M}}(x, y_1, \ldots, y_n))$$

y como por (i) $\phi_j^{\mathcal{M}} \leftrightarrow \phi_j^{\mathcal{N}}$, también es verdadera

$$\exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_n)),$$

lo que prueba (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). Veremos que se satisface (i) por inducción sobre la complejidad de ϕ_i (i=1,2, ..., n).

Si ϕ_i es de complejidad 0, no hay nada que probar, porque si ϕ_i es una fórmula atómica, entonces $\phi_i = \phi_i^{\mathcal{M}} = \phi_i^{\mathcal{N}}$.

Supongamos que *comp* $(\phi_i) > 0$ y que hemos verificado (i) para todas las fórmulas de la lista de complejidad menor que la complejidad de ϕ_i. En particular, suponemos válido (i) para todas las subfórmulas de ϕ_i.

Los casos $\phi_i = \neg\phi_j$ y $\phi_i = \phi_j \wedge \phi_k$, resultan de la hipótesis inductiva y la Definición 6.1.1 de restricción de una fórmula a una clase.

Supongamos ahora que $\phi_i = \exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ y fijemos $y_1, \ldots, y_n$ en $\mathcal{M}$.

$$\begin{array}{lll} & \phi_i^{\mathcal{M}}(y_1, \ldots, y_n) & \\ \leftrightarrow & \exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{M}}(x, y_1, \ldots, y_n) & [\text{ Definición de restricción}] \\ \leftrightarrow & \exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_n) & [\text{ por hipótesis inductiva sobre } \phi_j] \\ \leftrightarrow & \exists x(\mathcal{N}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_n) & [\rightarrow) \ \mathcal{M} \text{ “}\subseteq\text{” } \mathcal{N} \text{ y } \leftarrow) \text{ por (ii)}] \\ \leftrightarrow & \phi_i^{\mathcal{N}}(y_1, \ldots, y_n) & [\text{ Definición de restricción}] \end{array}$$

□

Teorema 6.3.2 (Teorema de la Reflexión). *Supongamos que $\mathcal{W}$ es una clase, que para cada ordinal α, W_α es un conjunto y que se cumplen las condiciones siguientes:*

W_1 *Si $\alpha < \beta$, entonces $W_\alpha \subset W_\beta$,*

W_2 *Si γ es un ordinal límite, entonces $W_\gamma = \bigcup_{\alpha \in \gamma} W_\alpha$,*

W_3 *“$\mathcal{W} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{Ord}} W_\alpha$”.*

Entonces, para toda lista de fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ vale la siguiente afirmación:

$$\forall\ \alpha\ \exists\ \beta\ >\ \alpha\ (\phi_1, \ldots, \phi_n\ \textit{son}\ W_\beta, \mathcal{W} - \textit{absolutas}),$$

donde α, β designan ordinales.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ es cerrada por subfórmulas.

Supongamos que

$$\phi_i(y_1, \ldots, y_n) = \exists x \psi(x, y_1, \ldots, y_n). \tag{6.3}$$

Dados $y_1, \ldots, y_n$ em $\mathcal{W}$, sea $G_i(y_1, \ldots, y_n) = \eta$ si η es el primer ordinal que satisface

$$\exists x(x \in W_\eta \wedge \psi_j^{\mathcal{W}}(x, y_1, \ldots, y_n)) \tag{6.4}$$

y sea $G_i(y_1, \ldots, y_n) = 0$ si no existe tal η. El Axioma de Sustitución garantiza que para todo ordinal ξ, $\{G_i(b_1, \ldots, b_n) : b_1, \ldots, b_n \in W_\xi\}$ es un conjunto de ordinales, y por lo tanto

$$F_i(\xi) = sup\{G_i(b_1, \ldots, b_n) : b_1, \ldots, b_n \in W_\xi\}$$

es un ordinal.

En el caso que ϕ_i no sea de la forma (6.3), sea $F_i(y_1, \ldots, y_n) = 0$ para todo $y_1, \ldots, y_n$ en $\mathcal{W}$.

Fijemos α y definamos

$$\beta_0 = \alpha,$$
$$\beta_{p \oplus 1} = max(\beta_p \oplus 1, F_1(\beta_p), \ldots, F_n(\beta_p))$$

De esta manera hemos definido a β_p por recursión para todo $p \in \omega$. Sea, ahora, $\beta = \bigvee_{p \in \omega} \beta_p$. Como $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \ldots \beta_p < \beta_{p+1} < \ldots$, resulta que β es un ordinal límite mayor que α.

Sea ϕ_i de la forma (6.3) y supongamos que $y_1, \ldots, y_n$ representan elementos de W_β que hacen verdadero $\exists x(\mathcal{W}(x) \wedge \phi_i^{\mathcal{W}}(y_1, \ldots, y_n))$. La condición W_3 implica que (6.4) debe ser satisfecha, y W_2 y W_3 implican que debe existir un ordinal $\xi < \beta$ tal que $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{W}_\xi$. Entonces se tiene que $\eta = G_i(y_1, \ldots, y_n) \leq F_i(\xi)$. Como $\xi < \beta$, debe existir un $p \in \omega$ tal que $\xi < \beta_p$, y esto implica que $F_i(\xi) \leq F_i(\beta_p) < \beta_{p+1} < \beta$. Luego $x \in W_\eta \subset W_\beta$.

Hemos probado así que

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n[(y_1 \in W_\beta \wedge \cdots \wedge y_n \in W_\beta) \rightarrow$$

$$(\exists x(\mathcal{W}(x) \wedge \psi_j^{\mathcal{W}}(x, y_1, \ldots, y_n)) \rightarrow \exists x(x \in W_\beta \wedge \psi_j^{\mathcal{W}}(x, y_1, \ldots, y_n))))]$$

y por el Lema 6.3.1 resulta que las fórmulas ϕ_i son $W_\beta - \mathcal{W}$-absolutas. $\square$

Tomemos $\mathcal{W}_\alpha = V_\alpha$ y $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, y supongamos que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son enunciados, esto es, fórmulas sin variables libres. Entonces, en ZF podemos probar que

$$\forall\ \alpha\ \exists\ \beta > \alpha\, (\phi_1^{V_\beta} \leftrightarrow \phi_1) \wedge \cdots \wedge (\phi_n^{V_\beta} \leftrightarrow \phi_n).$$

En particular, si ϕ_i es un axioma, entonces ϕ_i es un enunciado verdadero en ZF. Luego,

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha\, (\phi_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\beta}).$$

Más generalmente:

Corolario 6.3.3. *Sea S un conjunto de axiomas que extienden ZF (por ejemplo, S podría contener a los axiomas de ZF más el axioma de elección o el axioma de regularidad, la no existencia de un cardinal fuertemente inaccesible, etc.), y sean $\phi_1, \ldots, \phi_n$ axiomas de S. Entonces en ZF se demuestra que*

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha\, (\phi_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\beta}).$$

Ahora veremos que las teorías ZF y ZFC **no son** finitamente axiomatizables:

Corolario 6.3.4. *Sea S un conjunto de axiomas que extiende a ZF y $\phi_1, \ldots, \phi_n$ axiomas de S. Si a partir de $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se pueden probar todos los axiomas de S, entonces S no es consistente.*

Demostración. Supongamos que a partir de $\phi_1, \ldots, \phi_n$ podemos probar todos los axiomas de S.

Sea β el primer ordinal tal que

$$\phi_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\beta}.$$

La existencia de tal β está garantizada por el Corolario 6.3.3. Entonces todos los axiomas de S se cumplen en V_β. Como S extiende a ZF, todos los resultados que vimos sobre fórmulas absolutas valen (interpretados) en V_β. En particular, como $x \in V_\alpha$ puede escribirse:

$$On(\alpha) \wedge \exists y (y \text{ es función } \wedge dom(y) = \alpha \oplus 1 \wedge$$
$$\forall\gamma[\gamma \in \alpha \oplus 1 \to (f(\gamma) = \bigcup_{\delta\in\beta} \mathcal{P}(y(\delta) \wedge x \in y(\gamma))]$$

resulta que si $\alpha \in \beta$, V_α es V_β absoluta. Entonces ${V_\alpha}^{V_\beta} = V_\alpha \cap V_\beta = V_\alpha$. Como S permite probar

$$\exists\alpha\, \phi_1^{V_\alpha} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\alpha},$$

debe ser válido en V_β la siguiente proposición:

$$\exists\alpha < \beta\, \phi_1^{V_\alpha} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\alpha},$$

lo que contradice la elección de β. □

6.4. Ejercicios

Ejercicio 6.4.1. *Calcular* $card(V_n)$ *para* $n \in \omega$.

Ejercicio 6.4.2. *Un conjunto* x *se dice* ***hereditariamente finito*** *si* x *y todos los elemtos de su clausura transitiva son finitos.*

I) *De un ejemplo de un conjunto regular finito pero no hereditariamente finito.*

II) *Demuestre que* V_ω *es la clase de los conjuntos regulares hereditariamente finitos. Pista: si hubiese comjuntos regulares hereditariamente finitos que no estuviesen en* V_ω, *habría uno de rango mínimo.*

Ejercicio 6.4.3. *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase no vacía. Muestre que en* ZF^+ *se puede probar que la clase*

$$\tau(\mathcal{C}) = \{x : \mathcal{C}(x) \wedge \forall y \ (\mathcal{C}(y) \to (rg(x) \leq rg(y)))\},$$

esto es, la clase de los conjuntos de rango mínimo en $\mathcal{C}$, *es un conjunto no vacío. Pista: Existe un ordinal* α *tal que* $\tau(\mathcal{C}) \subset V_\alpha$.

Ejercicio 6.4.4. *En* ZF^+, *para todo conjunto* x *se define* $|x|$ *del modo siguiente:*

- $|x|$ *es el primer ordinal* α *tal que* $\alpha \sim x$, *si tal* α *existe, est es, si* x *admite un buen orden.*
- $|x| = \tau(\mathcal{C}_x)$, *donde* $\mathcal{C}_x = \{y : \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{x}}\}$ *en caso contrario.*

Probar que:

I) *Para todo* x, y, $|x| = |y|$ *si y sólo si* $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$.

II) *Si* x *es bien orenado,* $|x| = card(x)$.

III) *Si* x *no es bien ordenado, entonces* $|x|$ *no es transitivo.*