Capítulo 7

Consistencia relativa del Axioma de Elección

En este Capítulo nos proponemos mostrar que a partir de un modelo de ZF$^+$ se puede construir un modelo de ZFC$^+$. Esto significa si hubiese una inconsistencia en la teoría de conjuntos ésta no se debería al Axioma de Elección. Este importante resultado fue obtenido por Kurt Gödel en 1940. El modelo que se mostrará no es el original de Gödel, formado por los *conjuntos constructibles*, sino por otro algo más simple, formado por los *conjuntos definibles por ordinales* que fue sugerido por el mismo Gödel en 1946.

7.1. Relaciones definibles por fórmulas

Dado un conjunto a, $Df(a,n)$ será el conjunto de relaciones n-arias sobre a que son definibles por medio de una fórmula ϕ de primer orden relativizada a a. Más precisamente, $Df(a,n)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de a^n de la forma

$$\{(x_1,\ldots,x_n)\in a^n : \phi^a(x_1,\ldots,x_n)\},$$

para alguna fórmula ϕ con n variables libres.

Veamos como se puede formalizar esto en ZF, esto es, sin usar el Axioma de Elección.

Definición 7.1.1. *Sean a un conjunto, $n\in\omega$ e $i,j<n$, entonces*

(a) $Proj(a,r,n)=\{s\in a^n : \exists t\in r(t|_n=s)\}$.

(b) $Diag_\in(a,n,i,j)=\{s\in a^n : s(i)\in s(j)\}$.

(c) $Diag_=(a,n,i,j)=\{s\in a^n : s(i)=s(j)\}$.

(d) Por recursión sobre $k\in\omega$ definimos $Df'(k,a,n)$ (para todo n simultáneamente) por:

$$Df'(0,a,n)=\{Diag_\in(a,n,i,j) : i,j<n\}\cup\{Diag_=(a,n,i,j) : i,j<n\},$$

$$Df'(k+1,a,n) = Df'(k,a,n) \cup \{a^n \setminus r : r \in Df'(k,a,n)\} \cup$$

$$\{r \cap s : r, s \in Df'(k,a,n)\} \cup \{Proj(a,r,n) : r \in Df'(k,a,n+1)\}.$$

(e) $Df(a,n) = \bigcup_{k \in \omega} Df'(k,a,n)$.

Lema 7.1.1. *Si $r, s \in Df(a,n)$, entonces $a^n \setminus r \in Df(a,n)$ y $r \cap s \in Df(a,n)$. Si $r \in Df(a,n+1)$, entonces $Proj(a,r,n) \in Df(a,n)$.*

Lema 7.1.2. *Sea $\phi(x_0,\dots,x_{n-1})$ una fórmula cuyas variables libres figuren entre $x_0,\dots,x_{n-1}$. Entonces,*

$$\forall a[\{s \in a^n : \phi^a(s(o),\dots,s(n-1))\} \in Df(a,n)]. \tag{7.1}$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre $comp(\phi)$.

Si ϕ es $x_i \in x_j$, $i,j < n$, entonces (7.1) es consecuencia del hecho que $Diag_\in(a,n,i,j) \in Df(a,n)$. Análogamente, si ϕ es $x_i = x_j$, (7.1) vale pues $Diag_=(a,n,i,j) \in Df(a,n)$.

Supongamos ahora que (7.1) vale para toda fórmula de grado de complejidad inferior a ϕ.

Si $\phi = \neg\psi$ ó $\phi = (\psi \wedge \eta)$, por la hipótesis inductiva, (7.1) vale para ψ y para η, y en consecuencia, también vale para ϕ, pues $Df(a,n)$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(a^n)$ cerrado por complementos e intersecciones.

Si $\phi = \exists y\psi$, como y no es variable libre en ϕ, se tiene que $y \notin \{x_0,\dots,x_{n-1}\}$. Si y no es variable libre de ψ, entonces ϕ y ψ son equivalentes, y por la hipótesis inductiva, (7.1) vale para ϕ. Si por el contrario, y es libre en ψ, podemos renombrar y por x_n. Luego, $r = \{t \in a^{n+1} : \psi^a(t(0),\dots,t(n))\} \in Df(a,n+1)$, y podemos afirmar que $Proj(a,r,n) \in Df(a,n)$. Pero

$$Proj(a,r,n) = \{s \in a^n : \exists t \in r(t|_n = s)\} =$$

$$\{s \in a^n : \exists b \in a\psi(s(0),\dots,s(n-1),b)\} = \{s \in a^n : \phi^a(s(0),\dots,s(n-1))\},$$

por lo que podemos concluir que (7.1) vale para ϕ. $\square$

Nos proponemos ahora probar que para todo conjunto a y $n \in \omega$, $Df(a,n)$ es un conjunto numerable. Para eso definiremos para $m \in \omega$ los conjuntos $E(m,a,n)$ del modo siguiente:

(a) Si $m = 2^i \cdot 3^j$ e $i,j < n$, entonces $E(m,a,n) = Diag_\in(a,n,i,j)$.

(b) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ e $i,j < n$, entonces $E(m,a,n) = Diag_=(a,n,i,j)$.

(c) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2$, entonces $E(m,a,n) = a^n \setminus E(i,a,n)$.

(d) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, entonces $E(m,a,n) = E(i,a,n) \cap E(j,a,n)$.

(e) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, entonces $E(m,a,n) = Proj(a, E(i,a,n+1), n)$.

(f) Si m no es de la forma especificada en alguno de los incisos (a)-(e), entonces $E(m, a, n) = \emptyset$.

Lema 7.1.3. *Para todo conjunto a y todo $n \in \omega$,*

$$Df(a, n) = \{E(m, a, n) : m \in \omega\}.$$

Demostración. (a) $\forall n \in \omega(E(m, a, n) \in Df(a, n))$, para todo $m \in \omega$.

Haremos la demostración por inducción sobre m.

En efecto, $E(0, a, n) = \emptyset \in Df(a, n)$, pues $Df(a, n)$ es cerrado por complementos y por intersección. Supongamos que para $k \in \omega$, $\forall n \in \omega(E(k, a, n) \in Df(a, n))$. Entonces,

(1) Si $k + 1 == 2^i \cdot 3^j$ e $i, j < n$, entonces $E(k + 1, a, n) = Diag_{\in}(a, n, i, j) \in Df(a, n)$.

(2) Si $k + 1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ e $i, j < n$, entonces $E(m, a, n) = Diag_{=}(a, n, i, j) \in Df(a, n)$.

(3) Si $k + 1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, entonces $E(k + 1, a, n) = E(i, a, n) \cap E(j, a, n) \in Df(a, n)$, por la hipótsesis inductiva y dado que $Df(a, n)$ es cerrado por intersecciones.

(4) Si $k + 1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, entonces

$$E(k + 1, a, n) = Proj(a, E(i, a, n + 1), n).$$

Como, por la hipótesis inductiva $E(i, a, n+1) \in Df(a, n+1)$, resulta que $Proj(a, E(i, a, n + 1), n) \in Df(a, n)$.

(5) Si m no es de la forma especificada en alguno de los incisos (a)-(e), entonces $E(m, a, n) = 0 \in Df(a, n)$.

Hemos completado así la demostración de (a).

(b) $\forall n \in \omega(Df(a, n) \subseteq \{E(m, a, n) : m \in \omega\})$.

Bastará probar que $\forall n \in \omega(Df'(k, a, n) \subseteq \{E(m, a, n) : m \in \omega\})$ para todo $k \in \omega$, lo que haremos por inducción en k . Para $k = 0$:

$$\forall n \in \omega(Df'(0, a, n) = \{Diag_{\in}(a, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{Diag_{=}(a, n, i, j) : i, j < n\} \subseteq$$

$$\{E(m, a, n) : m \in \omega\}).$$

Si $\forall n \in \omega(Df'(k, a, n) \subseteq \{E(m, a, n) : m \in \omega\})$, como $\{E(m, a, n) : m \in \omega\}$ es cerrado por complementos, intersecciones y proyecciones, también contendrá a $Df'(k + 1, a, n)$ para todo $n \in \omega$. $\square$

Corolario 7.1.4. *$Df(a, n)$ es numerable y la función $m \mapsto E(m, a, n)$ de ω sobre $Df(a, n)$ es una enumeración efectiva.*

7.2. Conjuntos definibles por ordinales

Informalmente, un conjunto a se dice **definible por ordinales** si se lo puede definir por medio de una lista finita de ordinales. Esto es, si existe una lista finita de ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y una fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_n, x)$ tal que

$$\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a.$$

Observemos que cada ordinal es definible por ordinales. En efecto, sea $\phi(y_1, x)$ la fórmula atómica $y_1 = x$. Si α es un ordinal, vale que $\phi(\alpha, x) \leftrightarrow \alpha = x$.

Veamos como se puede definir la clase de los conjuntos definibles por ordinales en ZF$^+$, esto es,considerndo que el universo e la teoría de conjuntos es la clase $\mathcal{V}$ de los conjuntos regulares.

Comencemos por observar que a es definible por ordinales si lo es respecto a una clase V_β, con β suficientemente grande:

Si existe $\beta > max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, rg(a))$ tal que

$$\forall x \in V_\beta(\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a)^{V_\beta}. \tag{7.2}$$

En efecto, si a es definible por ordinales tenemos que

$$\forall x(\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a),$$

para algunos ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y alguna fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_n, x)$. Por el Teorema 6.3.2, existe $\beta > max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, rg(a))$ tal que ϕ es V_β-absoluta. Luego, (7.2) se satisface.

Por otro lado, si se cumple (7.2), entonces a es definible por ordinales en el universo V por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β.

Definición 7.2.1. *Dor es la clase de todos los conjuntos a tales que:*

$$\exists \beta > rg(a) \exists n \exists s \in \beta^n \exists r \in Df(V_\beta, n+1)$$

$$\forall x \in V_\beta(s\hat{}< x > \in r \leftrightarrow x = a),$$

donde $s\hat{}< x >$ *denota la función* $t\colon n+1 \to V_\beta$ *tal que* $t(i) = s(i)$, $0 \leq i \leq n-1$, $t(n) = x$.

La definición de la clase Dor tiene sentido en ZF$^+$ y vamos a ver que coincide con la clase de los conjuntos definibles por ordinales.

Teorema 7.2.1. *Para cada fórmula* $\phi(x_o, \ldots, x_{n-1}, x)$ *se tiene que*

$$\exists \alpha_0 \ldots \exists \alpha_{n-1}[(\forall x \phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a) \to Dor(a)]. \tag{7.3}$$

Demostración. Fijemos $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ y a y supongamos que

$$\forall x \phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a.$$

Por el Teorema 6.3.2 podemos fijar $\beta > max(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, rg(a))$ de modo tal que ϕ sea V_β-absoluta.

Sea $r = \{< y_0, \ldots, y_{n-1}, x >\in {V_\beta}^{n+1} : \phi(y_0, \ldots, y_{n-1}, x)\}$ y $s =< \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} >\in \beta^n$. Entonces, $\forall x \in V_\beta(s\hat{}< x >\in r \leftrightarrow x = a)$.

Pero por ser ϕ V_β-absoluta, resulta

$$r = \{< y_0, \ldots, y_{n-1}, x >\in {V_\beta}^{n+1} : \phi^{V_\beta}(y_0, \ldots, y_{n-1}, x)\}.$$

Luego, por el Lema 7.1.2, $r \in Df(V_\beta, n+1)$. Por lo tanto, a está en Dor. □

El teorema anterior nos dice que todo conjunto a definible por ordinales en el sentido intuitivo, esto es, existe una fórmula ϕ con $n + 1$ variables libres tal que $\forall x(\phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a)$, pertenece a Dor.

Vamos a probar la recíproca, para lo que daremos una fórmula ϕ que nos servirá para todos los conjuntos en Dor:

$$\forall a(Dor(a) \to \exists\alpha\forall x(\phi(\alpha, x) \leftrightarrow x = a))$$

Esta es una especie de “forma normal”. De hecho, ϕ definirá una “función” de Ord en Dor.

Los lectores que estén familiarizados con la teoría de funciones recursivas, notarán la similitud con la indexacción de las máquinas de Turing (en este caso ω debe ser sustituido por Ord) y la forma normal de Kleene.

Observemos que por la Definición 7.2.1, a cada conjunto a en la clase Dor le corresponde un número finito de ordinales: n, los n ordinales presentes en la n-upla s, β de la definición, junto con el m que caracteriza a la relación $r \in Df(a, n + 1)$: $r = E(m, a, n)$ para algún $m \in \omega$.

Luego, podemos indexar los conjuntos de la clase Dor por listas finitas de ordinales, esto es, elementos de $Ord^{<\omega} =$ “$\bigcup\limits_{n\in\omega} Ord^n$”.

El primer paso será ver que podemos, a su vez, indexar los elementos de $Ord^{<\omega}$ por Ord.

Si $s, t \in Ord^{<\omega}$, escribiremos $s \lhd t$ sí, y sólo si:

(i) $[max(img(s)) < max(img(t))] \vee$

(ii) $[(max(img(s)) = max(img(t))) \wedge ((dom(s) \subset dom(t)))] \vee$

(iii) $[(max(img(s)) = max(img(t))) \wedge (dom(s) = dom(t)) \wedge$
$(\exists k \in dom(s)((s|_k = t|_k) \wedge s(k) < t(k)))]$

Se verifica fácilmente que dados s, t, u en $Ord^{<\infty}$, $(s \neq t) \to ((s \lhd t) \vee (t \lhd s))$ y $((s \lhd t) \wedge (t \lhd u)) \to (s \lhd u)$.

Sea a un conjunto cuyos elementos están en $Ord^{<\omega}$. Entonces, $(a, \trianglelefteq)$ es un conjunto bien ordenado, donde $s \trianglelefteq t$ significa “$s \lhd t \vee s = t$”. Es claro que $\trianglelefteq$ es un orden sobre a. Sea $b \subseteq a, b \neq \emptyset$. Veamos que b tiene primer elemento: $\{max(img(s)) : s \in b\}$ es un conjunto no vacío de ordinales, y por lo tanto tiene primer elemento γ. El conjunto $\{n \in dom(s) : s \in b \wedge max(img(s)) = \gamma\}$ es un subconjunto no vacío de ω y tiene primer elemento p.

Sea $c = \{s \in b : max(img(s)) = \gamma \wedge dom(s) = p\}$. Para cada $i \in p$, definamos $t(i)$ inductivamente como sigue:

(i) $t(0) = min\{s(0) : s \in c\}$, $0 < i \in p$,

(i) $t(i) = min\{s(i) : s \in c \wedge s(j) = t(j), \text{ para } j \in i\}$.

Es claro que $t \in b$ y que $t \trianglelefteq s$ para todo $s \in b$.

Para cada $s \in Ord^{<\omega}$, la sección inicial $Ord_s^{<\omega} = \{t \in Ord^{<\omega} : t \triangleleft s\}$ es un conjunto. En efecto, si $\beta = max\{img(s)\}$, entonces

$$Ord_s^{<\omega} \subseteq (\beta \oplus 1)^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} (\beta \oplus 1)^n$$

que es un conjunto. Luego, para todo $s \in Ord^{<\omega}$, $Ord_s^{<\omega}$ es un conjunto bien ordenado, y por lo tanto existe un único ordinal α tal que $Ord_s^{<\omega} \sim \alpha$.

La fórmula "α es un ordinal isomorfo a la sección inicial $Ord_s^{<\omega}$ " define una relación funcional $H(s) = \alpha$, "$H\colon Ord^{<\omega} \to Ord$".

Se tiene que $s \triangleleft t$ si y sólo si $H(s) < H(t)$. En efecto, si $s \triangleleft t$, entonces $Ord_s^{<\omega}$ es una sección inicial de $Ord_t^{<\omega}$. Luego $H(s)$ es isomorfo a una sección inicial de $H(t)$, y por lo tanto, $H(s) < H(t)$. Por otro lado, si $H(s) < H(t)$, no puede ser que $t \trianglelefteq s$ y por lo tanto debe ser $s \triangleleft t$.

Podemos definir la relación funcional inversa de H, J, por la fórmula $J(\alpha) = s$ sí, y sólo si, $H(s) = \alpha$, que está definida sobre la clase "imagen " $H(Ord^{<\omega})$.

En realidad H es "sobre", esto es $H(Ord^{<\omega}) = Ord$. Para verlo, observemos primero que "$H(Ord^{<\omega})$" es decreciente en Ord. Sea $\beta < H(s)$ y sea f el isomorfismo $f\colon Ord_s^{<\omega} \to H(s)$. Por la cláusula (iii) de la Observación 3.2.1 existe $t \in Ord_s^{<\omega}$ tal que $\beta = H(t)$, lo que muestra que si α está en $H(Ord^{<\omega})$, también están todos los $\beta \in \alpha$. Esto implica que si hubiese un γ que no está en $H(Ord^{<\omega})$, entonces debería estar $H(Ord^{<\omega}) \subset \gamma$. Como la restrición de H a los ordinales es inyectiva, esto implicaría que hay una "función inyectiva"de los ordinales en un conjunto, lo que es imposible por el Lema 4.4.1. Luego J es una "funció inyectiva" de Ord sobre $H(Ord^{<\omega})$.

Vamos a definir ahora una "función sobreyectiva" $K\colon Ord^{<\omega} \to Dor$.

Si s en $Ord^{<\omega}$ es de la forma $t\hat{}< \beta, n, m >$, $n, m \in \omega$, $t \in \beta^{<\omega}$, $dom\, t = n$ y para algún (único) $a \in V_\beta(t\hat{} < x > \in E(m, V_\beta, n+1) \leftrightarrow x = a)$, definimos $K(s) = a$. Si s no es de la forma indicada, ponemos $K(s) = \emptyset$.

De la expresión (**??**) resulta que K es una "función" con dominio $Ord^{<\omega}$ e imagen contenida en Dor. Además, como $E(\_, V_\beta, n+1)\colon \omega \to Df(V_\beta, n+1)$ es sobreyectiva y $\emptyset$ está en Dor (pues todos los ordinales están), resulta que para todo conunto a en la clase Dor existe s en $Ord^{<\omega}$) tal que $a = K(s)$.

Consideremos, ahora, la composición

$$On \xrightarrow{J} On^{<\omega} \xrightarrow{K} Dor$$

Si $I = KJ$, I es una "función"de Ord sobre Dor. Si $I(\alpha) = a$, diremos que α es un **índice de** a. Todo a en Dor tiene un índice (al menos uno, por ejemplo $\emptyset$ tiene infinitos).

Sea $\psi(s,t)$ la fórmula $Ord(s) \wedge (t = I(s))$. Entonces,

$$\forall y(Dor(y) \rightarrow (\exists \alpha(Ord(\alpha) \wedge \forall x(\psi(x,\alpha) \rightarrow x = a)). \tag{7.4}$$

Esto prueba que todo conjunto en la clase Dor es definible por ordinales en el sentido informal dado al comienzo de esta Sección.

Entonces teniendo en cuenta el Teorema 7.2.1 tenemos el resultado siguiente, que muestra que hemos podido formalzar la noción de conjunto definible por ordinales en ZF$^+$:

Teorema 7.2.2. *Dor es la clase de los conjuntos definibles por ordinales.*

Nuestro próximo objetivo será utilizar los conjuntos definibles por ordinales para definir una subclase de $\mathcal{V}$ que satisfaga la relativización de los axiomas ZFC$^+$.

Lema 7.2.3. *Si w, z, w están en Dor, entonces*

(I) $\{w, z\} \in Dor$.

(II) $\cup w \in Dor$ *y* $\mathcal{P}(w) \in Dor$.

Demostración. (I) Sean $w = I(\alpha_1)$, $z = I(\alpha_2)$ y sea $a = \{w, z\}$ y sea $\phi(y_1, y_2, x)$ la fórmula:

$$Ord(y_1) \wedge Ord(y_2) \wedge (x = \{I(y_1), I(y_2)\}).$$

Entonces, $\forall x(\phi(\alpha_1, \alpha_2, x) \leftrightarrow x = a)$, lo que prueba que $\{w, z\} \in Dor$.

(II)Se prueba análogamente a (i), tomando como $\phi(x, y)$

$$Ord(y) \wedge (x = \cup I(y))$$

y

$$Ord(y) \wedge (x = \mathcal{P}(I(y)))$$

respectivamente. □

Como no es posible probar que Dor sea transitiva, vamos a considerar la clase de los conjuntos **hereditariamente definibles por ordinales**, que denotaremos $HDor$, formada por los conjuntos de Dor tales que su clausura transitiva está contenida en Dor:

$$HDor = \{a : Dor(a) \wedge \forall x(x \in Tr(a) \rightarrow Dor(x)\}. \tag{7.5}$$

Lema 7.2.4. *"$Ord \subseteq HDor \subseteq Dor$" y $HDor$ es una clase transitiva.*

Demostración. Sea α un ordinal. Sabemos que $\alpha \in Dor$. Como $Tr(\alpha) = \alpha$ y $\beta \in \alpha$ implica $\beta \in Ord \subseteq Dor$, resulta que $Tr(\alpha) \subseteq Dor$. Luego, $Ord \subseteq HDor$. Es obvio que $HDor \subseteq Dor$. Veamos ahora que $HDor$ es transitiva. Sea $x \in HDor$ e $y \in x$. Como $y \in x \subseteq Tr(x)$ y $Tr(y) \subseteq Tr(x) \subseteq Dor$, resulta que $y \in Dor$ y $Tr(y) \subseteq HDor$, lo que significa que $y \in HDor$. □

Lema 7.2.5. *Para todo conjunto a, si $a \in Dor$ y $a \subseteq HDor$, entonces $a \in HDor$.*

Demostración. Resulta de observar que, para todo a, $Tr(a) = a \cup \bigcup_{x \in a} Tr(x)$. □

Lema 7.2.6. *Para todo α, $V_\alpha \cap HDor \in HDor$.*

Demostración. Como $V_\alpha \cap HDor \subseteq HDor$, por el lema anterior basta ver que $V_\alpha \cap HDor \in Dor$. Sea $\phi(y, x)$ la fórmula

$$Ord(y) \wedge (x = V_y \cap HDor).$$

Luego, $\forall x(\phi(\alpha, x) \leftrightarrow x = V_\alpha \cap HDor)$, y por lo tanto, $V_\alpha \cap HDor \in Dor$. □

Teorema 7.2.7. *HDor satisface todos los axiomas de ZFC$^+$.*

Demostración. El Axioma de Extensionalidad se cumple pues $HDor$ es una clase transitiva (Teorema 6.1.1).

Veamos que se cumple el Axioma de Especificación. Para ello debemos ver que dada una fórmula $\varphi(y, z_1, \ldots, z_k)$ se tiene que para todo $x, y, z_1, \ldots, z_k$ en $HDor$, el conjunto $c = \{y \in x : \varphi(y, z_1, \ldots, z_k)^{HDor}\}$ está en $HDor$. La transitividad de $HDor$ asegura que todos los elementos de c están en $HDor$. Luego por el Lema 7.2.5 para probar que c está en $HDor$ falta ver que c está en Dor. Sea $\phi(w_o, \ldots, w_k, x)$ la fórmula

$$Ord(w_o) \wedge \cdots \wedge Ord(w_k) \wedge (x = \{t \in I(w_0) : \varphi(t, I(w_1), \ldots, I(w_k))^{HDor}\}),$$

y sean $y = I(\alpha_0), z_1 = I(\alpha_1), \ldots, z_k = I(\alpha_k)$. Entonces

$$\phi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, x) \leftrightarrow x = c,$$

y por el Teorema 7.2.1, $c \in HDor$.

Que el Axioma del Conjunto Vacío se satisface resulta del Lema 7.2.4.

Para ver que se cumple el Axioma de la Unión, veremos que

$$\forall a(HDor(a) \to HDor(\cup a)).$$

Sea $b = \cup a$. Como por el Lema 7.2.3 b está en Dor, basta verificar que $b \subseteq HDor$. Sea $x \in b$. Existe $y \in a$ tal que $x \in y$. Como $a \in HDor$, $y \in Tr(a) \subseteq HDor$, y como $HDor$ es transitiva, $x \in HDor$. Por lo tanto, $b \subseteq HDor$.

Para probar el Axioma del Conjunto Potencia basta mostrar que para todo a en $HDor$, $\mathcal{P}(a) \cap HDor \in HDor$. Sea $\alpha > rg(\mathcal{P}(a)$. Entonces teniendo en cuenta el Lema 7.2.6 se tiene que $\mathcal{P}(a) \subset V_{\alpha\oplus 1} \cap HDor \in HDor$, y por el Axioma de Especificación relativo a $HDor$,

$$\mathcal{P}(a) \cap HDor = \{x \in V_{\alpha\oplus 1} \cap HDor : x \subseteq a\} \in HDor.$$

Para probar el Axioma (Esquema) de Sustitución, sea $\varphi(x, y)$ una fórmula y a un conjunto en $HDor$ tal que se satisfaga

$$\forall x((x \in a) \to \exists! y(HDor(y) \wedge \varphi(x, y)^{HDor}.$$

Por el Axioma de Sustitución válido en $\mathcal{V}$, existe el conjunto

$$b = \{y : (HDor(y) \wedge (\exists x \in a\varphi(x, y)^{HDor})\}.$$

Debemos probar que b está en $HDor$. Sea $\alpha > \sup\{rg(y)\}_{y\in b}$. Entonces $b \subset V_\alpha \cap HDor \in HDor$ y por el Axioma de Especificación relativo a $HDor$,

$$b = \{y \in V_\alpha \cap HDor : y \in b\} \in HDor.$$

Observemos que necesitamos el Axioma de Especificación relativo para probar que el Axioma de Sustitución se satisface. Por eso debimos probar primero que se satisface el Axioma de Especificación. Es claro que si pudiésemos probar directamente la validez del Axioma de Separación, no haría falta probar que se satisface el Axioma de Especificación. Por otro lado, una vez probado que se sartisface el Axioma de Separación, sabemos que también se satisface el Axioma del Par.

El Axioma del Infinito se satisface porque $\omega \in Ord \subseteq HDor$.

El Axioma de Regularidad se satisface porque $HDor \subseteq \mathcal{V}$.

Vimos entonces que la clase $HDor$ satisface los axiomas ZF$^+$.

Veamos que también se satisface el Axioma de Elección (relativo a $HDor$). Como $HDor$ es transitiva y satisface los axiomas de especificación, del par y de la unión, si a y r son conjuntos en $HDor$ y r es un buen orden sobre a, entonces por el Teorema 6.1.7 (r es un buen orden sobre $a)^{HDor}$ es verdadero. Luego, basta probar que para todo $a \in HDor$ existe $r \in HDor$ que es un buen orden sobre a.

Sea $a = I(\alpha) \in HDor$. Como $a \subset Dor$, podemos bien ordenar los elementos de a por medio de los menores de sus índices:

$$r = \{\langle s, t\rangle \in a \times a : \exists \xi(s = I(\xi) \wedge \forall \eta \leq \xi(t \neq I(\eta))\}. \tag{7.6}$$

Es fácil verificar que r define un buen orden sobre a (ver el Ejercicio 7.3.1).

Sea

$$r(y) = \{\langle s, t\rangle \in I(y) \times I(y) : \exists \xi(s = I(\xi) \wedge \forall \eta \leq \xi(t \neq I(\eta))\}$$

y sea $\varphi(y, x)$ la fórmula $Ord(y) \wedge x = r(y)$. Si $a = I(\alpha)$, entonces

$$\varphi(\alpha, x) \leftrightarrow x = r.$$

Luego por el Teorema 7.2.1, $r \in Dor$ y como $r \subseteq a \times a \subset HDor$, por el Lema 7.2.5 resulta que r está en $HDor$. □

Corolario 7.2.8 (Gödel)**.** *Si ZF$^+$ es consistente, también lo es ZFC$^+$.*

7.3. Ejercicios

Ejercicio 7.3.1. *Probar que la relación r definida sobre a por (7.6) es un buen orden. Pista: Recordar que los elementos de a son de la forma $I(\xi)$ para algún ordinal ξ.*

El siguiente ejercicio aclarará algunos de los argumentos usados en la demostración del Teorema 7.2.7.

Ejercicio 7.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface el Axioma de Especificación y la siguiente condición:*

$$\forall x(x \subset \mathcal{C} \to \exists\ y((\mathcal{C}(y) \wedge x \subseteq y))). \tag{7.7}$$

Probar que $\mathcal{C}$ satisface los Axiomas de ZF menos el Axioma del Infinito.

Ejercicio 7.3.3. *Dar un ejemplo de una clase transitiva $\mathcal{C}$ que satisfaga el Axioma de Especificación y (7.7) pero no satisfaga el Axioma del Infinito.*