Topología Algebraica
Primer Cuatrimestre 2003
Lectura - Ejercicios Adicionales IV
Números de Betti y Característica de Euler

Aclaración : todos los complejos de cadenas y homologías que trataremos en estas notas son sobre $\mathbb{Z}$.

Definición y Observación 1. Si M es un grupo abeliano finitamente generado, por el teorema de estructura de $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generados sabemos que existen únicos $m \in \mathbb{N}_0$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que

$$M = \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$$

donde n_i divide a n_{i+1} para todo i. El número m se denomina el rango de M y lo denotamos $r(M)$ y a los números $n_1, \ldots, n_k$ se los llama coeficientes de torsión de M.

Definición y Observación 2. Sea C_* un complejo de cadenas de grupos abelianos (o simplemente un grupo abeliano graduado). Decimos que C_* es finitamente generado si los grupos C_n son finitamente generados para todo n y además $C_n = 0$ salvo para finitos n. Es claro que si C_* es un complejo finitamente generado entonces su homología $H_*(C)$ es un grupo abeliano graduado finitamente generado.

Definición 3. Definimos la característica de Euler de un complejo de cadenas (o grupo abeliano graduado) C_* como

$$\chi(C_*) = \sum (-1)^n r(C_n)$$

Ejercicio 1. Sea C_* un complejo de cadenas finitamente generado. Probar que $\chi(C_*) = \chi(H_*(C))$.

Usando estas herramientas vamos a definir dos invariantes topológicos importantes: los números de Betti y la característica de Euler de CW-complejos finitos.

Veremos en clase que si X es un CW-complejo, la homología de X puede calcularse vía su estructura celular (similarmente a lo que ocurre con los poliedros) . En particular, si X es un CW-complejo finito (es decir, tiene finitas celdas) entonces $H_n(X)$ es un grupo abeliano finitamente generado.

Definición 4. Dado un CW-complejo finito, definimos el n-ésimo número de Betti de X como

$$b_n(X) = r(H_n(X))$$

donde $r(H_n(X))$ denota el rango. También se define la característica de Euler de X como

$$\chi(X) = \sum (-1)^n \alpha_n$$

donde α_n es la cantidad de n-celdas de X.

Ejercicio 2. Calcular la característica de Euler de las esferas, los discos y el toro.

Ejercicio 3. Sea X un CW-complejo finito. Probar que $\chi(X) = \sum (-1)^n b_n(X)$.

Notar que los números de Betti y la característica de Euler son invariantes topológicos ya que dependen de la homología de X. Por lo tanto, $\chi(X)$ depende solamente del tipo homotópico de X. En particular, $\chi(X)$ es independiente de la estructura celular que le damos a X.