Topología Algebraica
Primer Cuatrimestre 2003
Lectura - Ejercicios Adicionales II
Homotopías, cilindros y conos de complejos simpliciales y complejos de cadena

1. Repaso: Conos y Cilindros de espacios topológicos

Antes de definir conos y cilindros de complejos simpliciales y complejos de R-módulos, repasemos estas construcciones para espacios topológicos.

Definición 1.1. Dado un espacio topológico X, definimos el cilindro de X como el espacio $IX = X \times I$ y el cono de X como el espacio que se obtiene del cilindro identificando todos los puntos de la tapa en uno solo, es decir, el cono CX es el espacio $IX/\sim$ donde $(x,t) \sim (x',s)$ si y sólo si $t = s = 1$. La inclusión $i : X \to CX$ está definida por $i(x) = (x, 0)$ (es decir, es la inclusión en la base del cono).

Ejemplo 1.2. El cono de S^{n-1} es D^n y la inclusión en el cono es la inclusión en el borde.

Ejercicios 1. (1) Probar que CX es contráctil.
(2) Probar que $f : X \to Y$ es nullhomotópica si y sólo si f se extiende continuamente al cono, es decir, existe $\tilde{f} : CX \to Y$ tal que $\tilde{f}i = f$.

Definición 1.3. Dada una función continua $f : X \to Y$, definimos el cono de f como el espacio $C(f)$ que se obtiene pegando la base del cono CX con el espacio Y via la f, es decir tomando la unión de CX con Y e identificando los puntos $(x, 0)$ con los puntos $f(x) \in Y$. De la misma forma, el cilindro de f es el espacio Z_f que se obtiene pegando la base del cilindro IX a Y via la f. Observar que se tienen inclusiones $i : Y \to C(f)$ e $i : Y \to Z_f$.

Ejercicios 2. (1) Probar que Y es un retracto por deformación de Z_f.
(2) Sea $g : Y \to W$ continua. Probar que gf es nullhomotópica si y sólo si g se extiende al cono $C(f)$.

2. Homotopías, cilindros y conos de complejos simpliciales

Definición 2.1. Sean K, L complejos simpliciales y $f, g : K \to L$ morfismos simpliciales. Decimos que f y g son contiguos si para todo simplex s de K, $f(s) \cup g(s)$ es un simplex en L. Dos morfismos simpliciales $f, g : K \to L$ son homotópicos si existe una sucesión finita $f_0 = f, f_1, \dots, f_n = g$ tal que f_i, f_{i+1} son contiguos para todo i.

Vamos a dar una definición equivalente de homotopía usando cilindros. Para eso definimos primero el producto de dos complejos simpliciales K y T como el complejo simplicial cuyos vértices son los pares ordenados (v, w) donde v es vértice de K y w es vértice de T. Los símplices de $K \times T$ son los subconjuntos finitos no vacíos $s = \{(v_i, w_i)\}$ de vértices de $K \times T$ tales que $s_K = \{v_i\}$ y $s_T = \{w_i\}$ son símplices de K y T respectivamente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos I_n como el complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es $\{0, 1, \dots, n\}$ y los símplices son los subconjuntos $\{i, i+1\}$ para $i = 0, \dots, n-1$.

Observar que se tienen dos morfismos simpliciales $i_0, i_n : K \to K \times I_n$ definidos por $i_0(v) = (v, 0)$ e $i_n(v) = (v, n)$.

Ejercicios 3. (1) Dados $f, g : K \to L$, probar que f y g son homotópicos si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ y $H : K \times I_n \to L$ morfismo simplicial tal que $Hi_0 = f$ y $Hi_n = g$.
(2) Probar que si $f, g : K \to L$ son homotópicos entonces $f_*, g_* : |K| \to |L|$ son funciones continuas homotópicas.

Definición 2.2. Dado K definimos el cono CK como el complejo simplicial que se obtiene agregando un vértice $*$ a los vértices de K y agregándole a los símplices de K todos los n-símplices que se obtienen uniendo los $(n-1)$-símplices de K con el nuevo vértice $*$. Por ejemplo si K es el 1-simplex, CK es el 2-simplex.

Ejercicios 4.
(1) Probar que CK es contráctil.
(2) Probar que si $f : K \to L$ es contiguo a un morfismo constante entonces se extiende al cono CK. ¿Qué pasa si es homotópico pero no contiguo?
(3) ¿Cómo definiría el cono de un morfismo?

3. Conos y cilindros de complejos de cadena

Sea R un anillo conmutativo con unidad. El producto tensorial de dos complejos de cadena (M, d) y (N, d') se define como el complejo que en grado n es

$$(M \otimes N)_n = \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes N_j$$

y el morfismo de borde está definido por

$$d(m \otimes n) = d(m) \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes d'(n)$$

donde $|m|$ es el grado de m.

Definición 3.1. Se define el complejo vacío como el complejo que en cada grado tiene el módulo 0. El punto $*$ es el complejo que en grado cero tiene una copia de R y en los otros grados tiene el módulo 0. El intervalo I es el complejo que en grado cero tiene el módulo $R \oplus R$, en grado uno tiene a R y en los demás grados tiene al 0 y el morfismo $d_1 : R \to R \oplus R$ está definido por $d_1(a) = (a, -a)$.

Definición 3.2. El cilindro de un complejo de cadenas (M, d) es el complejo $IM = I \otimes M$. Explítamente, está definido por $(IM)_n = M_{n-1} \oplus M_n \oplus M_n$ con $d(m, r, s) = (-d(m), d(r) + m, d(s) - m)$. Se tienen dos inclusiones $i_0, i_1 : M \to IM$ dadas por $i_0(m) = (0, m, 0)$ e $i_1(m) = (0, 0, m)$

Ejercicio 5. Probar que $f \simeq g : M \to N$ si y sólo si existe $H : IM \to N$ tal que $Hi_0 = f$ y $Hi_1 = g$.

Definición 3.3. Dado un complejo (M, d) se define el cono CM como el complejo de cadenas que en grado n tiene a $M_{n-1} \oplus M_n$ con diferencial definido por $d(a, b) = (-d(a), d(b) - a)$. Obviamente se tiene una inclusión $i : M \to CM$.

Ejercicios 6.
(1) Probar que CM es contráctil.
(2) Probar que $f : M \to N$ es nullhomotópica si y sólo si se extiende al cono CM.
(3) Sea K un complejo simplicial y sea $C.(K)$ el complejo de cadenas asociado (que en grado n tiene al módulo libre generado por los n-símplices de K). Probar que el cono $CC.(K)$ del complejo de K es el cociente del complejo $C.(CK)$ del cono de K dividido por el punto $*$ (el complejo de cadenas que tiene sólo una copia de R en grado cero).

Definición 3.4. Sea $f : C \to D$ un morfismo de complejos. Definimos el cono de f como el complejo $C(f)$ que en grado n es el módulo $C_{n-1} \oplus D_n$ y cuyo diferencial está definido por

$$d(a, b) = (-d(a), d(b) - f(a))$$

Ejercicios 7.
(1) Probar que $C(f)$ es efectivamente un complejo.
(2) Probar que existe una s.e.c. de complejos

$$0 \to C \to C(f) \to D[-1] \to 0$$

donde $D[-1]$ es el trasladado del complejo D, es decir $(D[-1])_n = D_{n-1}$ y el morfismo $s : C(f) \to D[-1]$ está definido por $s(a, b) = -a$.
(3) Probar usando el item anterior que un morfismo $f : C \to D$ es un quasi-isomorfismo si y sólo si $C(f)$ es acíclico.