Topología Algebraica
Primer Cuatrimestre 2003
Ejercicio Adicional

Nota: El objetivo de este ejercicio guiado es probar el siguiente resultado: Sea X espacio topológico, entonces

$$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_{q-n}(X)$$

(ejercicio 13 práctica 3).

(1) Sea $A \subset X$ retracto, es decir, existe $r : X \to A$ continua tal que $ri = 1_A$. Probar que $H_q(X) = H_q(A) \oplus H_q(X, A)$.

(2) Sea X espacio topológico y sea $p \in S^n$. Deducir del ejercicio anterior que

$$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_q(X \times S^n, X \times \{p\})$$

(3) Probar la sucesión relativa de Mayer-Vietoris: Sea (X, Y) par topológico, sean $A, B \subset X$ tales que $int\ A \cup int\ B = X$ y sean $C \subset A$ y $D \subset B$ tales que $int\ D \cup int\ C = Y$. Probar que existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \to H_q(A \cap B, C \cap D) \to H_q(A, C) \oplus H_q(B, D) \to H_q(X, Y) \to \ldots$$

(4) Probar, usando el ejercicio anterior, que

$$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-1}(X \times S^{n-1}, X \times \{p\})$$

(5) Deducir que

$$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-n}(X)$$

y por lo tanto se obtiene el resultado buscado:

$$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_{q-n}(X)$$

(6) Calcular los grupos de homología de $S^n \times S^m$ y los del toro n-dimensional.