Topología Algebraica
Primer Cuatrimestre 2003
Práctica Uno
Preliminares: Homotopías- Categorías

(1) Sea p un punto cualquiera de S^n y sea $f : S^n \to X$ continua. Probar que son equivalentes:
  (a) f es null homotópica.
  (b) f se puede extender continuamente al disco D^{n+1}.
  (c) f es null homotópica relativa a p.

(2) Probar que si $q : X \to Y$ es cociente y Z es localmente compacto y Hausdorff entonces $q \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cociente (sug: ley exponencial).

(3) Probar que D^n/S^{n-1} es homeomorfo a S^n.

(4) Sea [**Top**] la categoría homotópica de espacios topológicos, es decir, la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y sus morfismos son las clases homotópicas de funciones continuas. Probar que el funtor q : **Top** $\to$ [**Top**] definido por $q(X) = X$ en los objetos y $q(f) = [f]$ (la clase de f) en los morfismos, manda equivalencias homotópicas en isomorfismos y es universal con respecto a esta propiedad, es decir: dada una categoría $\mathcal{D}$ y un funtor F : **Top** $\to \mathcal{D}$ que manda equivalencias homotópicas en isomorfismos de $\mathcal{D}$, existe un único funtor $\tilde{F}$: [**Top**] $\to \mathcal{D}$ tal que $\tilde{F}q = F$.

(5) Sean X y Z espacios contráctiles. Probar que tienen el mismo tipo homotópico y que cualquier función continua entre ellos es una equivalencia homotópica.

(6) Probar que la inmersión $i : D^n \to D^{n+1}$ definida por $i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$ es un retracto por deformación fuerte.

(7) Probar que la inclusión de S^{n-1} como el ecuador de S^n, se puede extender a las inmersiones $i^-, i^+ : D^n \to S^n$ del disco en el hemisferio sur (resp. norte) de la esfera. Más aún, i^- e i^+ son homotópicas pero no son homotópicas relativas a S^{n-1}.

(8) Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto A de $\mathcal{C}$ se dice final sii para todo objeto B de $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $B \to A$ en $\mathcal{C}$. Un objeto D se dice inicial sii para todo objeto B existe un único morfismo $D \to B$ en $\mathcal{C}$. Un objeto C se dice objeto cero ó nulo si es al mismo tiempo final e inicial. Probar que (en el caso de existir) los objetos finales, iniciales y nulos son únicos salvo isomorfismos.

(9) Caracterizar (en el caso de que existan) los objetos finales, iniciales y nulos en las categorías **Set**, $\mathbf{Set}_*$, **Top**, $\mathbf{Top}_*$, [**Top**], [$\mathbf{Top}_*$], **Ab**, **Gr**, **Grpd**, $\mathbf{A-Mod}$.

(10) Un morfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathcal{C}$ se llama mono(morfismo) si para todo par de morfismos $h_1, h_2 : D \to A$ tal que $h_1 \neq h_2$ vale $fh_1 \neq fh_2$. Probar que los monomorfismos en **Set** son exactamente las funciones inyectivas y en $\mathbf{A-Mod}$ (en particular en **Ab**) coinciden con los monomorfismos en el sentido usual.

(11) Un morfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathcal{C}$ se llama epi(morfismo) si para todo par de morfismos $h_1, h_2 : B \to D$ tal que $h_1 \neq h_2$ vale que $h_1 f \neq h_2 f$. Probar que los epimorfismos en **Set** son exactamente las funciones sobreyectivas y en $\mathbf{A-Mod}$ coinciden con los epi en el sentido usual.

(12) Probar que la inclusión $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ es un epimorfismo en la categoría **Haus** de espacios Hausdorff. Generalizar este resultado para inclusiones de subespacios densos de espacios Hausdorff.

(13) Probar que la inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es un epi en la categoría de anillos.

(14) Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Probar que si f es un isomorfismo en $\mathcal{C}$ entonces es mono y epi pero en general la recíproca es falsa.

(15) Caracterizar los productos, coproductos, pullbacks y pushouts en **Set** y **Top**.

(16) Sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Probar que existe un funtor $\mathcal{C}(A,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ que le asigna a cada objeto B de $\mathcal{C}$ el conjunto $\mathcal{C}(A,B)$ de morfismos de A a B en $\mathcal{C}$ y a cada morfismo $f : B \to D$, la función $f_* : \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{C}(A,D)$ definida por $f_*(g) = fg$. Además, dado un morfismo $h : A \to A'$, se tiene una transformación natural $h^* : \mathcal{C}(A',-) \Rightarrow \mathcal{C}(A,-)$, donde para cada B, $h^*_B : \mathcal{C}(A',B) \to \mathcal{C}(A,B)$ está definida por $h^*_B(g) = gh$.

(17) Sea k un cuerpo y sea $L : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect_k}$ el funtor que le asigna a cada conjunto S el espacio vectorial con base S (es decir el espacio vectorial formado por las combinaciones lineales de elementos de S). Probar que L es adjunto a izquierda del funtor olvido $O : \mathbf{Vect_k} \to \mathbf{Set}$.

(18) Sea C un espacio localmente compacto y Hausdorff. Probar que el funtor $- \times C : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ que le asigna a cada espacio topológico X el producto $X \times C$, es adjunto a izquierda del funtor $-^C : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ que le asigna a cada espacio X el espacio de funciones continuas X^C con la topología compacto-abierta.

(19) Sean $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Probar que L es adjunto a izquierda de R si y sólo si existen transformaciones naturales $\nu : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$ y $\epsilon : LR \Rightarrow id_{\mathcal{D}}$ tales que las composiciones

$$L(A) \xrightarrow{L(\nu)} LRL(A) \xrightarrow{\epsilon L} L(A)$$

y

$$R(B) \xrightarrow{\nu R} RLR(B) \xrightarrow{R(\epsilon)} R(B)$$

son la identidad para todo objeto A en $\mathcal{C}$ y todo objeto B en $\mathcal{D}$.

(20) Sea $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ adjunto a izquierda de $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Probar que L preserva coproductos, pushouts y epimorfismos y R preserva productos, pullbacks y monomorfismos.

(21) Deducir del ejercicio anterior que si C es localmente compacto y Hausdorff entonces $- \times C$: $\mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ preserva coproductos y pushouts. En particular, el funtor cilindro $I : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ manda pushouts en pushouts.