Topología Algebraica

Primer Cuatrimestre 2003

Práctica Dos

Complejos y Homología - Homología Simplicial

Nota: En esta práctica, R denota un anillo conmutativo con unidad. Los módulos son R-módulos a izquierda. **Ch** es la categoría de complejos de R-módulos y $\overline{\mathbf{R-Mod}}$ la categoría de R-módulos graduados.

(1) Sea $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ una sucesión exacta. Probar que son equivalentes:
 (a) f es sección.
 (b) g es retracción.
 (c) Existe un isomorfismo $\phi : N \to M \oplus P$ tal que $\phi f(m) = (m, 0)$ y $g\phi^{-1}(m,p) = p$.

(2) Probar que todo módulo es cociente de un libre.

(3) Hallar todos los grupos abelianos posibles M en las siguientes sucesiones exactas:
 (a) $0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$
 (b) $0 \to \mathbb{Z}_m \to M \to \mathbb{Z}_n \to 0$
 (c) $0 \to Z_m \to M \to \mathbb{Z}^n \to 0$

(4) (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M_5 \arrow[d, "e"'] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

Probar que
 (a) Si b y d son mono y a es epi, entonces c es mono.
 (b) Si b y d son epi y e es mono, entonces c es epi.
 (c) Concluir que si a, b, d y e son iso, entonces c es iso.

(5) (Lema de la serpiente) Probar que un diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 & \end{tikzcd}$$

induce una sucesión exacta

$$\ker(a) \to \ker(b) \to \ker(c) \to \operatorname{coker}(a) \to \operatorname{coker}(b) \to \operatorname{coker}(c)$$

Además, si $M_1 \to M_2$ es mono, entonces $\ker(a) \to \ker(b)$ también y si $N_2 \to N_3$ es epi, también lo es $\operatorname{coker}(b) \to \operatorname{coker}(c)$.

(6) Probar que la homología induce un funtor $H : \mathbf{Ch} \to \overline{\mathbf{R-Mod}}$.

(7) Sea (C_*, d) un complejo. Probar que son equivalentes:
 (a) C_* es exacto.
 (b) C_* es acíclico.
 (c) $0 \to C_*$ es un quasi isomorfismo (0 denota el complejo que en cada lugar tiene el módulo 0).

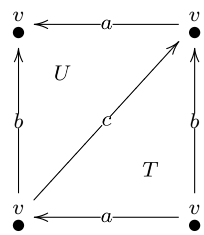
(8) Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Probar que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que $H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D)$.

(9) Sea s un 2-simplex. Calcular la homología simplicial de s y de $\dot{s}$ (el borde de s). Observar que con ésto se está calculando la homología de D^2 y S^1.

(10) Calcular la homología simplicial del tetraedro (borde de un 3-simplex). Observar que se está calculando la homología de S^2.

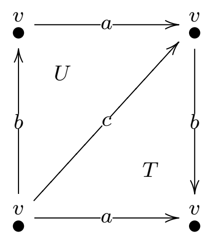
(11) Calcular la homología de los siguientes Δ-complejos:

(a) Toro



identificando las caras opuestas (a con a y b con b en la misma dirección).

(b) Botella de Klein



identificando las caras opuestas (a con a en la misma dirección y b con b en direcciones opuestas).

(c) El paracaidas triangular que se obtiene tomando un 2-simplex e identificando los 3 vértices en uno solo.

(d) El espacio X que se obtiene de un n-simplex identificando todas las caras de la misma dimensión (es decir, X tiene un k-simplex por cada $k \leq n$).