

Topología Algebraica
 Primer Cuatrimestre 2003
 Práctica Tres
 Homología Singular y Aplicaciones

- (1) Sea X espacio topológico y $\{X_k\}$ familia de componentes arco conexas de X . Probar que $H_n(X) = \oplus H_n(X_k)$.
- (2) Probar que si $i : A \rightarrow X$ es un retracts entonces $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ es sección. Más aún, $H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(X, A)$.
- (3) Sea A un subespacio de X . Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X .
- (4) (a) Sea $A \subset X$ un subespacio. Un n -ciclo relativo es un elemento $\sigma \in S_n(X)$ tal que $d\sigma \in S_{n-1}(A)$ y un n -borde relativo es un elemento $\sigma \in S_n(X)$ tal que $\sigma = d\omega + \gamma$ con $\omega \in S_{n+1}(X)$ y $\gamma \in S_n(A)$. Probar que los elementos de $H_n(X, A)$ son las clases de los n -ciclos relativos y que la clase de un ciclo relativo σ es 0 si y sólo si σ es un borde relativo.
 (b) Probar que el morfismo de conexión $\partial : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ de la sucesión exacta larga de homología relativa tiene la siguiente descripción: Si $\bar{\sigma}$ es la clase de un ciclo relativo en $H_n(X, A)$, $\partial(\bar{\sigma})$ es la clase del ciclo $d\sigma$ en $H_{n-1}(A)$.
- (5) Tomando como anillo base a $R = \mathbb{Z}$, probar que $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ es un grupo abeliano libre y calcular una base.
- (6) Probar que una función continua de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce un morfismo $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B) \forall n$
- (7) Probar que una homotopía de pares $h : f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce una homotopía $\phi : f_* \simeq g_*$ entre los complejos relativos y por lo tanto $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.
- (8) Sea X espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$ subespacios tales que $B \subseteq A$. Probar que existe una s.e. larga

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$
 inducida por las inclusiones.
- (9) Sea $i : A \rightarrow X$ subespacio y sea $C(i)$ el cono de la inclusión i . Probar que $\tilde{H}_n(C(i)) = H_n(X, A)$.
- (10) Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno para todo i , es decir existe un entorno abierto U_i de x_i tal que la inclusión del punto en el abierto es un retracts por deformación fuerte. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases x_i , probar que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.
- (11) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee_{i \in \Lambda} S^k)$.
- (12) Sea Y un espacio contráctil y sea $y \in Y$. Probar que $H_n(X \times Y, X \times \{y\}) = 0$ para todo espacio X .
- (13) Sea X un espacio topológico y sea $p \in S^n$. Probar que

$$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) \simeq H_{q-n}(X)$$

y que

$$H_q(X \times S^n) \simeq H_{q-n}(X) \oplus H_q(X)$$

(Sugerencia: usar ejercicio anterior e inducción en n).

- (14) Calcular $H_q(S^n \times S^m)$ y $H_q(T^n)$, donde T^n es el toro n -dimensional.
- (15) Sean $x_1, \dots, x_m$ puntos de $\mathbb{R}^n$. Calcular $H_q(\mathbb{R}^n - \{x_1, \dots, x_m\})$.
- (16) Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos. Probar que si U y V son homeomorfos, entonces $n = m$.
- (17) Dado un espacio X , definimos la suspensión ΣX como el espacio que se obtiene del cilindro $X \times I$ identificando todos los puntos $(x, 1)$ de la tapa en uno solo y todos los puntos $(x, 0)$ de la base en otro punto. Notar que la suspensión se obtiene del cono CX identificando todos los puntos de la base. Probar que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$.
- (18) Dada $f : S^n \rightarrow S^n$, el morfismo $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$ es un endomorfismo de $\mathbb{Z}$ y por lo tanto tiene la forma $f_*(m) = a.m$ para algún $a \in \mathbb{Z}$ (que depende sólo de f). Se define el grado de f como $\deg(f) = a$. Probar que
- (a) $\deg(1_{S^n}) = 1$.
 - (b) Si f no es suryectiva entonces $\deg(f) = 0$.
 - (c) si $f \simeq g$ entonces $\deg(f) = \deg(g)$.
 - (d) $\deg(fg) = \deg(f).\deg(g)$.
 - (e) Si f es equivalencia homotópica entonces $\deg(f) = 1$ o $\deg(f) = -1$.
 - (f) Si f es una reflexión (es decir $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$) entonces $\deg(f) = -1$.
 - (g) Si $f(x) = -x$ entonces $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.
 - (h) Si f no tiene puntos fijos entonces $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.
- (19) Sea X un abierto de $\mathbb{R}^n$. Probar que toda función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva es abierta. (Sugerencia: teorema de separación de Jordan).
- (20) Sea X un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Probar que si existe una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva, entonces $m \geq n$.