Topología Algebraica
Primer Cuatrimestre 2003
Práctica Cuatro
CW-Complejos (Parte I)

Nota: Todos los espacios topológicos considerados en esta práctica son Hausdorff.

(1) Describir estructuras celulares para la esfera n-dimensional, los discos n-dimensionales y el toro.

(2) Probar que el interior de toda celda principal de un CW-complejo es abierto.

(3) Comprobar que los poliedros son CW-complejos con estructura celular inducida por la estructura simplicial.

(4) Sea X un CW-complejo, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función. Probar que son equivalentes:
(a) $f : X \to Y$ es continua.
(b) La restricción $f : e^n_\alpha \to Y$ es continua para toda celda e^n_α.
(c) $f \circ f^n_\alpha : D^n \to Y$ es continua para toda celda e^n_α, donde $f^n_\alpha : D^n \to e^n_\alpha$ es la función característica de la celda.

(5) Sea X un CW-complejo. Probar que $H : X \times I \to Y$ es continua si y sólo si todas las restricciones $H : e^n_\alpha \times I \to Y$ lo son.

(6) Sea A un subcomplejo de un CW-complejo X. Probar que A es cerrado en X.

(7) Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Probar que la base define una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}^n$ tomando como k-esqueleto al conjunto

$$(\mathbb{R}^n)^k = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i v_i |\ s_i \in \mathbb{R} \text{ y } s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n-k \text{ índices } i \right\}$$

(8) Sea K una estructura celular en X y L una estructura celular en Y. Probar que

$$K \times L = \{ e^n_\alpha \times e^m_\beta \mid e^n_\alpha \in K,\ e^m_\beta \in L \}$$

es una estructura celular en $X \times Y$.

(9) Probar que si X e Y son CW-complejos e Y es localmente compacto entonces $X \times Y$ es un CW-complejo. En particular, si X es un CW-complejo entonces $X \times I$ también lo es. Describir la estructura celular de $X \times I$ en función de la estructura celular de X.

(10) Sea (X, A) un CW-complejo relativo. Probar que X/A es un CW-complejo.

(11) Probar las siguientes propiedades básicas de las cofibraciones.
(a) Todo homeomorfismo es una cofibración.
(b) La composición de dos cofibraciones es una cofibración.
(c) Las cofibraciones son estables por cambio de cobase, es decir, si $i : A \to X$ es una cofibración y

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

es un pushout, entonces $j : B \to Y$ es cofibración.

(12) Probar que la inclusión en la base del cono $i : X \to CX$ es una cofibración. En particular, la inclusión $i : S^n \to D^{n+1}$ es cofibración.

(13) Deducir de los dos ejercicios anteriores que una adjunción de n-celdas (X, Y) es una cofibración y que si (X, A) es un CW-complejo relativo entonces la inclusión $i : A \to X$ es una cofibración.

(14) Sea Y un espacio topológico. Probar que Y es contráctil si y sólo si para toda cofibración $i : A \to X$ y toda función continua $f : A \to Y$ existe una extensión continua $\overline{f} : X \to Y$ tal que $\overline{f}i = f$. En particular, si (X, A) es un CW-complejo relativo e Y es un espacio contráctil, toda función continua $f : A \to Y$ se extiende continuamente a X.

(15) Sea (X, A) un CW-complejo relativo y sea $a \in A$. Probar que si A es fuertemente contráctil (es decir, la inclusión del punto a en A es un retracto por deformación fuerte), entonces la proyección

$$p : (X, A) \to (X/A, *)$$

es una equivalencia homotópica.