Topología Algebraica
Primer Cuatrimestre 2003
Práctica Cinco
Grupos de Homotopía

(1) Sea X un espacio topológico y sea $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que son equivalentes:
   (a) X es n-conexo.
   (b) Si $m \leq n$, toda función continua $f : S^m \to X$ es homotópica a una constante.
   (c) Si $m \leq n$, toda función continua $f : S^m \to X$ se extiende continuamente a una función $\overline{f} : D^{m+1} \to X$.

(2) Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos arco conexos y sea $\prod X_i$ el producto. Probar que $\pi_n(\prod X_i) = \prod \pi_n(X_i)$.

(3) Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica. Probar que
$$f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$$
es un isomorfismo para todo n y todo $x \in X$. (Sugerencia: Si $g : Y \to X$ es una inversa homotópica de f, entonces $g_* f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(X, gf(x))$ es iso).

(4) Deducir del ejercicio anterior que si X es contráctil, entonces $\pi_n(X, x) = 0$ para todo n y todo $x \in X$.

(5) Sea $p : E \to B$ un revestimiento y sean $b_0 \in B$ y $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Probar que
$$p_* : \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$$
es un isomorfismo para todo $n \geq 2$. (Sugerencia: usar que S^n es simplemente conexo para $n \geq 2$ y las propiedades de levantamiento de los revestimientos).

(6) Deducir del ejercicio anterior que $\pi_n(S^1) = 0$ para $n \geq 2$ y calcular los grupos de homotopía del toro n-dimensional (comparar con sus grupos de homología).

(7) Sea (X, A) un par topológico, $x_0 \in A$ y $s_0 \in S^{n-1}$. Probar que una función $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ representa la clase del cero en $\pi_n(X, A, x_0)$ si y sólo si f es homotópica relativa a S^{n-1} a una función cuya imagen está contenida en A.

(8) Sea (X, A) un par topológico y $x_0 \in A$.
   (a) Probar que existe un morfismo $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ inducido por las restricciones de las funciones $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ a S^{n-1}.
   (b) Probar que la siguiente sucesión es exacta:
$$\ldots \to \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to \ldots \to \pi_0(X, x_0)$$
   donde $i : A \to X$ y $j : (X, x_0) \to (X, A)$ son las inclusiones.

(9) Sea X un espacio arco conexo y CX el cono de X. Probar que $\pi_n(CX, X, x_0) = \pi_{n-1}(X, x_0)$ para todo $n \geq 1$.