Topología Algebraica
Primer Cuatrimestre 2004
Práctica Uno
Homotopías, cilindros, conos y cofibraciones.

(1) Probar que si $q : X \to Y$ es cociente y Z es localmente compacto y Hausdorff entonces $q \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cociente.

(2) Probar que el cociente D^n/S^{n-1} es homeomorfo a S^n.

(3) Sean X y Z espacios contráctiles. Probar que tienen el mismo tipo homotópico y que cualquier función continua entre ellos es una equivalencia homotópica.

(4) Probar que la inmersión $i : D^n \to D^{n+1}$ definida por $i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$ es un retracto por deformación fuerte.

(5) Probar que la inclusión de S^{n-1} como el ecuador de S^n, se puede extender a las inmersiones $i^-, i^+ : D^n \to S^n$ del disco en el hemisferio sur (resp. norte) de la esfera. Más aún, i^- e i^+ son homotópicas pero no son homotópicas relativas a S^{n-1}.

(6) Probar que un espacio X es contráctil si y sólo si es retracto de su cono (es decir, existe $r : CX \to X$ tal que $ri = 1_X$).

(7) Sea $A \subset X$ subespacio y supongamos existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que
(a) $H(x, 0) = x \ \forall x \in X$
(b) $H(A \times I) \subset A$
(c) $H(a, 1) = a_0 \forall a \in A$
Probar que la función cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

(8) Sea $f : X \to Y$ continua. Se define el cono de f como el espacio C_f que se obtiene pegando el cono de X con el espacio Y e identificando los puntos $\overline{(x, 1)}$ del cono de X con los puntos $f(x)$ de Y. Notar que se tiene una inclusión $i : Y \to C_f$. Dada una función continua $g : Y \to W$, probar que $gf : X \to W$ es nullhomotópica si y sólo si g se puede extender continuamente de Y a C_f.

(9) Probar que la composición de cofibraciones es cofibración.

(10) Probar que las cofibraciones son funciones inyectivas.

(11) Sea $A \subset X$ tal que la inclusión es una cofibración y una equivalencia homotópica. Probar que A es un retracto por deformación de X.

(12) Sea A un subespacio cerrado de X. Probar que la inclusión es una cofibración si y sólo si $X \times 0 \cup A \times I$ es un retracto de $X \times I$.

(13) Sea X un espacio Hausdorff y $A \subset X$ una cofibración. Probar que A es cerrado en X.

(14) Sea X espacio topológico y sean X_1, X_2 subespacios cerrados de X tal que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $A \subset X$ tal que $X_1 \cap X_2 \subset A$. Probar que, si las inclusiones $A \cap X_1 \subset X_1$ y $A \cap X_2 \subset X_2$ son cofibraciones, entonces también lo es $A \subset X$.