**Topología Algebraica**
Versión 2004
Práctica Dos
Poliedros, Subdivisiones, Grupoide de Aristas y Grafos.

(1) Sea $X$ un conjunto y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una colección de subconjuntos de $X$. El *nervio* de $\mathcal{U}$ es el complejo simplicial $K(\mathcal{U})$ cuyos símplices son los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathcal{U}$, $s = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{ik} \neq \emptyset$.
 (a) Probar que efectivamente $K(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial.
 (b) Sea $K$ complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{st\ v | v \in K\}$ cubrimiento abierto de $|K|$. Probar que la función que le asigna a cada vértice $v$ de $K$ el abierto $st\ v$ de $|K|$ induce un isomorfismo simplicial $K = K(\mathcal{U})$.

(2) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de un espacio topológico $X$ y sea $K(\mathcal{U})$ su nervio. Una función continua $f : X \to |K(\mathcal{U})|$ se dice canónica si $f^{-1}(st\ U) \subset U$ para todo $U$ del cubrimiento $\mathcal{U}$. Probar que:
 (a) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de $X$, existe una biyección entre las funciones canónicas $X \to |K(\mathcal{U})|$ y las particiones de la unidad subordinadas a $\mathcal{U}$.
 (b) Si $\mathcal{U}$ es cubrimiento localmente finito de $X$, entonces todas las funciones canónicas $X \to |K(\mathcal{U})|$ son homotópicas.

(3) Un espacio topológico $X$ tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de $X$ admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $dim\ X = n$ si $dim\ X \leq n$ y $dim\ X \not\leq n$. Probar que:
 (a) Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $dim\ A \leq dim\ X$.
 (b) Si $K$ complejo simplicial finito y $dim\ K \leq n$ entonces $dim\ |K| \leq n$.
 (c) Si $s$ es un $n$-simplex, entonces $dim\ |s| = n$.
 (d) Si $X$ es espacio paracompacto y $dim\ X \leq n$, entonces toda función continua $f : X \to S^m$ es nullhomotópica para $m > n$.

(4) Sea $X$ un espacio métrico compacto y sea $C$ el espacio de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ con la métrica:
$$d(f, g) = \sup\{||f(x) - g(x)||\ |x \in X\}$$
Probar que:
 (a) $C$ es espacio métrico completo.
 (b) Para todo $m \in \mathbb{N}$, el subconjunto
$$C_m = \{f \in C \mid diam(f^{-1}(z)) < \frac{1}{m}\ \forall\ z \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$$
 es abierto en $C$.
 (c) $\bigcap C_m$ es el conjunto de homeomorfismos de $X$ en $\mathbb{R}^{2n+1}$.
 (d) Si $dim\ X \leq n$, entonces $C_m$ es denso en $C$ para todo $m$. Deducir que, en este caso, $X$ puede ser inmerso en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

(5) Probar que si $(X, A)$ es par poliédrico entonces la inclusión $i : A \to X$ es una cofibración.

(6) Sea $X$ un espacio $n$-conexo, es decir que toda $f : S^m \to X$ continua es nullhomotópica para todo $m \leq n$. Sea $K$ complejo simplicial y $K^n$ su $n$-esqueleto. Probar que toda función continua $g : |K| \to X$ es homotópica a alguna que manda todo $K^n$ a un punto.

(7) Probar que un poliedro es contráctil si y sólo si es $n$-conexo para todo $n$.

(8) Una *pseudavariedad n-dimensional* es un complejo simplicial $K$ que cumple lo siguiente:
 (i) $K$ es homogéneamente $n$-dimensional, es decir, todo simplex de $K$ es cara de algún $n$-simplex.
 (ii) Todo $(n-1)$-simplex de $K$ es cara de a lo sumo dos $n$-símplices.

(iii) Para todo par de $n$-símplices $s, s'$, existe una sucesión finita $s = s_0, s_1, \ldots, s_r = s'$ de $n$-símplices tales que $s_i$ y $s_{i+1}$ tienen una $(n-1)$-cara en común para todo $i$.

El *borde* de una pseudovariedad de dimensión $n$ es el subcomplejo $\dot{K}$ generado por los $(n-1)$-símplices que son caras de exactamente un $n$-simplex de $K$. Si $\dot{K}$ es vacía decimos que $K$ es un pseudovariedad sin borde.

Probar lo siguiente:

(a) Un $n$-simplex $s$ es una pseudovariedad $n$-dimensional y su borde (como pseudovariedad) es $\dot{s}$.

(b) El borde de una pseudovariedad finita de dimensión 1 es vacío ó tiene exactamente dos vértices.

(9) Probar el teorema de Van Kampen para complejos simpliciales: Sea $K$ complejo simplicial conexo y sean $L_1, L_2 \subset K$ subcomplejos conexos tales que $L_1 \cap L_2$ es un subcomplejo conexo no vacío y $L_1 \cup L_2 = K$y sea $v$ un vértice de $L1 \cap L_2$. Entonces el grupo de caminos de aristas $E(K, v)$ es isomorfo al grupo que se obtiene cocientando el producto libre $E(L_1, v)$ con $E(L_2, v)$ por el subgrupo normal generado por los elementos de la forma $i_*(\psi) j_*(\psi)^{-1}$ para $\psi \in E(L_1 \cap L_2, v)$ (donde $i : L_1 \cap L_2 \to L_1$ y $j : L_1 \cap L_2 \to L_1$ son las inclusiones).

(10) Sea $(X, x)$ un espacio punteado (es decir, $x \in X$). Probar que existe un poliedro punteado $(Y, y)$ y una función continua $f : Y \to X$ con $f(y) = x$ tal que $f_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, x)$ es un isomorfismo.

(11) Un *grafo* es un complejo simplicial de dimensión 1 y un *árbol* es un grafo simplemente conexo. Probar que:

(a) Un grafo es un árbol si y sólo si es contráctil.

(b) Si $K$ es un complejo simplicial conexo entonces $K$ contiene árboles maximales y todo árbol maximal contiene todos los vértices de $K$.