Topología Algebraica
Versión 2004
Práctica Tres
CW-Complejos

Nota: Todos los espacios topológicos considerados en esta práctica son Hausdorff.

(1) Describir estructuras de CW-complejos para los discos D^n y para el disco unitario infinito D^∞. (Ojo: observar que D^n NO se obtiene de D^{n-1} adjuntando n-celdas).

(2) Comprobar que los poliedros son CW-complejos con estructura celular inducida por la estructura simplicial.

(3) Sea X un CW-complejo. Probar que todo compacto $K \subseteq X$ interseca sólo un número finito de interiores de celdas.

(4) Sea X un CW-complejo, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función. Probar que son equivalentes:
(a) $f : X \to Y$ es continua.
(b) La restricción $f : e^n_\alpha \to Y$ es continua para toda celda e^n_α.
(c) $f \circ f^n_\alpha : D^n \to Y$ es continua para toda celda e^n_α, donde $f^n_\alpha : D^n \to e^n_\alpha$ es la función característica de la celda.

(5) Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Probar que la base define una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}^n$ tomando como k-esqueleto al conjunto

$$(\mathbb{R}^n)^k = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i v_i | \ s_i \in \mathbb{R} \text{ y } s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n-k \text{ índices } i \right\}$$

(6) Probar que si X e Y son CW-complejos e Y es localmente compacto entonces $X \times Y$ es un CW-complejo. En particular, si X es un CW-complejo entonces $X \times I$ también lo es. Describir la estructura celular de $X \times I$ en función de la estructura celular de X.

(7) Sea (X, A) un CW-complejo relativo. Probar que X/A es un CW-complejo.

(8) Sea (X, A) un CW-relativo. Probar que la inclusión $i : A \to X$ es una cofibración.

(9) Sea $i : A \to X$ una cofibración. Probar que, si A es contráctil, entonces la proyección $p : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

(10) Sea Y un espacio topológico. Probar que Y es contráctil si y sólo si para toda cofibración $i : A \to X$ y toda función continua $f : A \to Y$ existe una extensión continua $\overline{f} : X \to Y$ tal que $\overline{f} i = f$. En particular, si (X, A) es un CW-complejo relativo e Y es un espacio contráctil, toda función continua $f : A \to Y$ se extiende continuamente a X.

(11) Supongamos que X se obtiene de A adjuntando una n-celda e^n. Si x es un punto del interior de la celda, entonces A es un retracto por deformación fuerte de $X - \{x\}$.