Topología Algebraica – Edición 2005
Ejercicios adicionales II

1. Sea X un CW complejo y $A \subset X$ un subcomplejo. Sean $f_1, f_2 : A \to Y$ continuas tales que $f_1 \simeq f_2$. Para $i = 1, 2$ denotamos P_i al pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & P_i \end{tikzcd}$$

Probar que existe una equivalencia homotópica $\phi : P_1 \to P_2$ relativa a Y.

2. Sean $(X, A), (Y, A)$ pares topológicos tales que las inclusiones de A en X e Y son cofibraciones. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica que restringida a A es la identidad, entonces f resulta equivalencia homotópica relativa a A.

3. Sean X e Y CW complejos. Recordar que una función $f : X \to Y$ es *celular* si $f(X^n) \subseteq Y^n$ para todo $n \geq 0$. Probar que, si $A \subset X$ es subcomplejo y $g : A \to Y$ es celular, entonces el pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

es un CW-complejo.

4. (Torres de Postnikov). Sea X un CW conexo. Probar que para todo natural n existe un CW X_n, que se obtiene de X adjuntando celdas de dimensión mayores o iguales a $n + 2$, tal que $\pi_i(X_n) = \pi_i(X)$ para todo $i \leq n$ y $\pi_i(X_n) = 0$ para todo $i > n$. Además, las inclusiones $X \to X_n$ se extienden a funciones continuas $X_{n+1} \to X_n$ de tal forma que se tiene una torre

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] \\ & X_3 \arrow[d] \\ & X_2 \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[ru] \arrow[ruu] & X_1 \end{tikzcd}$$

Los X_n se pueden pensar como truncaciones de X que lo van a aproximando cada vez mejor (a medida que el n aumenta).

5. Probar que una función entre CW complejos n-dimensionales y conexos es una equivalencia homotópica si induce isomorfismos en los π_i para $i \leq n$. (Sug: tomar revestimientos universales y usar homología).

6. Si X es un CW n-dimensional y tiene un subcomplejo $A \subset X$ que es del tipo homotópico de S^n, entonces la inclusión induce un monomorfismo $\pi_n(A) \to \pi_n(X)$ (Sug: usar Hurewicz).

7. Sea X un CW tal que se tiene una familia de subcomplejos $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ tales que X es la unión de todos y cada inclusión $X_i \to X_{i+1}$ es nullhomotópica. Probar que X resulta contráctil.

8. Decimos que dos espacios X, Y son equivalentes débilmente si existe una sucesión finita $X = X_1, \ldots, X_n = Y$ y equivalencias débiles $X_i \to X_{i+1}$ o viceversa. Probar que X e Y son equivalentes débiles si y sólo si admiten una CW-aproximación en común.