Topología Algebraica – Edición 2005
Práctica Uno: Preliminares

(I) Preliminares topológicos: homotopías, cilindros, conos y retractos

1. Probar que si $q : X \to Y$ es cociente y Z es localmente compacto y Hausdorff entonces
$$q \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$$
es cociente (sug: ley exponencial).

2. Probar que $f : X \to Y$ es null homotópica si y sólo si se puede extender continuamente al cono de X, es decir, si existe una función continua $\tilde{f} : CX \to Y$ tal que $\tilde{f}i = f$, donde $i : X \to CX$ es la inclusión en la tapa.

3. Sean X y Z espacios contráctiles. Probar que tienen el mismo tipo homotópico y que cualquier función continua entre ellos es una equivalencia homotópica.

4. Probar que D^n/S^{n-1} es homeomorfo a S^n.

5. Probar que la inmersión $i : D^n \to D^{n+1}$ definida por $i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$ es un retracto por deformación fuerte.

6. Probar que la inclusión de S^{n-1} como el ecuador de S^n, se puede extender a las inmersiones $i^-, i^+ : D^n \to S^n$ del disco en el hemisferio sur (resp. norte) de la esfera. Más aún, i^- e i^+ son homotópicas pero no son homotópicas relativas a S^{n-1}.

7. Probar que un espacio X es contráctil si y sólo si es retracto de su cono (es decir, existe $r : CX \to X$ tal que $ri = 1_X$).

8. Sea $A \subset X$ subespacio y supongamos existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que
   a) $H(x, 0) = x \ \forall x \in X$
   b) $H(A \times I) \subset A$
   c) $H(a, 1) = a_0 \forall a \in A$
   Probar que la función cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

9. Sea $f : X \to Y$ continua. Se define el cono de f como el espacio C_f que se obtiene pegando el cono de X con el espacio Y e identificando los puntos $\overline{(x, 1)}$ del cono de X con los puntos $f(x)$ de Y. Notar que se tiene una inclusión $i : Y \to C_f$. Dada una función continua $g : Y \to W$, probar que $gf : X \to W$ es nullhomotópica si y sólo si g se puede extender continuamente de Y a C_f.

10. Sea $f : X \to Y$ continua y sea Z_f el cilindro de f. Probar que la inclusión $j : Y \to Z_f$ es un retracto por deformación fuerte.

(II) Preliminares categóricos

11. Sea [**Top**] la categoría homotópica de espacios topológicos, es decir, la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y sus morfismos son las clases homotópicas de funciones continuas. Probar que el funtor q : **Top** $\to$ [**Top**] definido por $q(X) = X$ en los objetos y $q(f) = [f]$ (la clase de f) en los morfismos, manda equivalencias homotópicas en isomorfismos y es universal con respecto a esta propiedad, es decir: dada una categoría $\mathcal{D}$ y un funtor F : **Top** $\to \mathcal{D}$ que manda equivalencias homotópicas en isomorfismos de $\mathcal{D}$, existe un único funtor $\tilde{F}$: [**Top**] $\to \mathcal{D}$ tal que $\tilde{F}q = F$.

12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto A de $\mathcal{C}$ se dice final sii para todo objeto B de $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $B \to A$ en $\mathcal{C}$. Un objeto D se dice inicial sii para todo objeto B existe un único morfismo $D \to B$ en $\mathcal{C}$. Un objeto C se dice objeto cero ó nulo si es al mismo tiempo final e inicial. Probar que (en el caso de existir) los objetos finales, iniciales y nulos son únicos salvo isomorfismos.

13. Caracterizar (en el caso de que existan) los objetos finales, iniciales y nulos en las categorías **Set**, $\mathbf{Set}_*$, **Top**, $\mathbf{Top}_*$, [**Top**], $[\mathbf{Top}_*]$, **Ab**, **Gr**, **Grpd**, $\mathbf{A}-\mathbf{Mod}$.

14. Caracterizar los productos, coproductos, pullbacks y pushouts en **Set** y **Top**.

15. Sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Probar que existe un funtor $\mathcal{C}(A,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ que le asigna a cada objeto B de $\mathcal{C}$ el conjunto $\mathcal{C}(A,B)$ de morfismos de A a B en $\mathcal{C}$ y a cada morfismo $f : B \to D$, la función $f_* : \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{C}(A,D)$ definida por $f_*(g) = fg$. Además, dado un morfismo $h : A \to A'$, se tiene una transformación natural $h^* : \mathcal{C}(A',-) \Rightarrow \mathcal{C}(A,-)$, donde para cada B, $h^*_B : \mathcal{C}(A',B) \to \mathcal{C}(A,B)$ está definida por $h^*_B(g) = gh$.

16. Sea k un cuerpo y sea $L : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect_k}$ el funtor que le asigna a cada conjunto S el espacio vectorial con base S (es decir el espacio vectorial formado por las combinaciones lineales de elementos de S). Probar que L es adjunto a izquierda del funtor olvido $O : \mathbf{Vect_k} \to \mathbf{Set}$.

17. Sea C un espacio localmente compacto y Hausdorff. Probar que el funtor $- \times C : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ que le asigna a cada espacio topológico X el producto $X \times C$, es adjunto a izquierda del funtor $-^C : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ que le asigna a cada espacio X el espacio de funciones continuas X^C con la topología compacto-abierta.

18. Sean $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Probar que L es adjunto a izquierda de R si y sólo si existen transformaciones naturales $\nu : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow RL$ y $\epsilon : LR \Rightarrow id_{\mathcal{D}}$ tales que las composiciones
$$L(A) \xrightarrow{L(\nu)} LRL(A) \xrightarrow{\epsilon L} L(A)$$
y
$$R(B) \xrightarrow{\nu R} RLR(B) \xrightarrow{R(\epsilon)} R(B)$$
son la identidad para todo objeto A en $\mathcal{C}$ y todo objeto B en $\mathcal{D}$.

19. Sea $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ adjunto a izquierda de $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Probar que L preserva coproductos, pushouts y epimorfismos y R preserva productos, pullbacks y monomorfismos.

20. Deducir del ejercicio anterior que si C es localmente compacto y Hausdorff entonces $- \times C$: $\mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ preserva coproductos y pushouts. En particular, el funtor cilindro $I : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ manda pushouts en pushouts.