Topología Algebraica – Edición 2005

Práctica Dos: Fibraciones y Cofibraciones

1. Sea $i : A \to X$ una cofibración y sean $f, g : A \to Y$ continuas tales que $f \simeq g$. Probar que f se extiende continuamente a X si y sólo si g se extiende. Además, si una de las dos se extiende, se puede encontrar una extensión de la otra que sea homotópica a la extensión de la primera.

2. Probar que la composición de cofibraciones es cofibración, los homeos son cofibraciones y que las cofibraciones son estables por cambio de cobase.

3. Probar que las cofibraciones son funciones inyectivas.

4. Sea $A \subset X$ tal que la inclusión es una cofibración y una equivalencia homotópica. Probar que A es un retracto por deformación de X.

5. Sea A un subespacio cerrado de X. Probar que la inclusión es una cofibración si y sólo si $X \times 0 \cup A \times I$ es un retracto de $X \times I$.

6. Sea X un espacio Hausdorff y $A \subset X$ una cofibración. Probar que A es cerrado en X.

7. Sea X espacio topológico y sean X_1, X_2 subespacios cerrados de X tal que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $A \subset X$ tal que $X_1 \cap X_2 \subset A$. Probar que, si las inclusiones $A \cap X_1 \subset X_1$ y $A \cap X_2 \subset X_2$ son cofibraciones, entonces también lo es $A \subset X$.

8. Probar que la inclusión en la base del cono $i : X \to CX$ es una cofibración. En particular, la inclusión $i : S^n \to D^{n+1}$ es cofibración.

9. Sea $A \subset X$ una cofibración con A contráctil. Probar que la función cociente $q : X \to X/A$ es equivalencia homotópica.

10. Probar que la composición de fibraciones es una fibración, los homeos son fibraciones y las fibraciones son estables por cambio de base.

11. Sea $p : E \to B$ una fibración. Probar que existe una función continua
$$\phi : E \times_B B^I = \{(e, \omega) \in E \times B^I,\ p(e) = \omega(0)\} \to E^I$$
tal que $\phi(e, \omega)(0) = e$ y $p\phi(e, \omega)(t) = \omega(t)$.
Recíprocamente, dada $p : E \to B$ continua, si existe ϕ como arriba, entonces p es fibración.

12. Sea $p : E \to B$ fibración y supongamos que B es arco conexo. Dados dos puntos b_0 y b_1 en B, probar que las fibras $F_0 = p^{-1}(b_0)$ y $F_1 = p^{-1}(b_1)$ son homotópicamente equivalentes.

13. Sea $p : E \to B$ una fibración.

   a) Si B es contráctil y $F = p^{-1}(b)$ es la fibra en algún punto $b \in B$, probar que existe una equivalencia homotópica $\phi : E \to B \times F$ tal que $\pi\phi = p$, donde $\pi : B \times F \to B$ es la proyección.

   Nombre: Decimos en este caso, que la fibración $p : E \to B$ es homotópicamente trivial.

   b) Si $p : E \to B$ es homotópicamente trivial y $A \subset B$ es una cofibración, entonces la fibración inducida $p_A : p^{-1}(A) \to A$ es homotópicamente trivial.