Topología Algebraica – Edición 2005
Práctica Tres

Grupos de Homotopía – Primera Parte

1. Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos arco conexos y sea $\prod X_i$ el producto. Probar que $\pi_n(\prod X_i) = \prod \pi_n(X_i)$.

2. Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica. Probar que
$$f_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$$
es un isomorfismo para todo n y todo $x \in X$.

3. Deducir del ejercicio anterior que si X es contráctil, entonces $\pi_n(X, x) = 0$ para todo n y todo $x \in X$.

4. Sea $p : E \to B$ un revestimiento y sean $b_0 \in B$ y $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Probar que
$$p_* : \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$$
es un isomorfismo para todo $n \geq 2$. (Sugerencia: usar que S^n es simplemente conexo para $n \geq 2$)

5. Deducir del ejercicio anterior que $\pi_n(S^1) = 0$ para $n \geq 2$. Calcular los grupos de homotopía del toro n-dimensional.

CW-Complejos – Primera Parte

1. Describir estructuras celulares para la esfera n-dimensional, los discos n-dimensionales y el toro.

2. Probar que el interior de toda celda principal de un CW-complejo es abierto.

3. Sea A un subcomplejo de un CW-complejo X. Probar que A es cerrado en X.

4. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Probar que la base define una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}^n$ tomando como k-esqueleto al conjunto
$$(\mathbb{R}^n)^k = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i v_i |\ s_i \in \mathbb{R} \text{ y } s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n-k \text{ índices } i \right\}$$

5. Sea K una estructura celular en X y L una estructura celular en Y. Probar que
$$K \times L = \{e^n_\alpha \times e^m_\beta \mid e^n_\alpha \in K,\ e^m_\beta \in L\}$$
es una estructura celular en $X \times Y$.

6. Probar que si X e Y son CW-complejos e Y es localmente compacto entonces $X \times Y$ es un CW-complejo. En particular, si X es un CW-complejo entonces $X \times I$ también lo es. Describir la estructura celular de $X \times I$ en función de la estructura celular de X.

7. Sea (X, A) un CW-complejo relativo. Probar que X/A es un CW-complejo.

8. Probar que, si (X, A) es un CW-complejo relativo e Y es un espacio contráctil, toda función continua $f : A \to Y$ se extiende continuamente a X.

9. Sea (X, A) un CW-complejo relativo y sea $a \in A$. Probar que si A es fuertemente contráctil (es decir, la inclusión del punto a en A es un retracto por deformación fuerte), entonces la proyección
$$p : (X, A) \to (X/A, *)$$
es una equivalencia homotópica.