Topología Algebraica – Edición 2005
Práctica Cuatro

Grupos de Homotopía – Segunda Parte

1. Probar que (X, A) es un par n-conexo si y sólo si la inclusión $i : A \to X$ es una n-equivalencia.

2. Sea $x_0 \in B \subset A \subset X$

   a) Probar que existe un morfismo $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, B, x_0)$ inducido por las restricciones de las funciones $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ a I^{n-1}.

   b) Probar que el morfismo ∂ induce una sucesión exacta

$$\ldots \to \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \to \ldots \to \pi_1(X, A, x_0),$$

   donde $i : (A, B) \to (X, B)$ y $j : (X, B) \to (X, A)$ son las inclusiones.

3. Sea X un espacio arco conexo y CX el cono de X. Probar que la inclusión de X en el cono induce isomofismos $\pi_n(CX, X, x_0) = \pi_{n-1}(X, x_0)$ para todo $n \geq 1$.

CW-Complejos – Segunda Parte

1. Si $(X, x_0), (Y, y_0)$ son espacios punteados, el producto smash se define como
$$X \wedge Y = X \times Y/X \vee Y$$
donde la unión en un punto $X \vee Y$ es considerada como el subespacio de $X \times Y$ formado por los puntos de la forma (x, y_0) y (x_0, y). Notar que si X e Y son CW-complejos, entonces $X \wedge Y$ es un CW-complejo (si uno de los dos es localmente finito se toma la topología producto. Si no se le impone a $X \wedge Y$ la topología débil inducida). Sea X un CW-complejo n-conexo e Y un CW-complejo m-conexo. Probar que $X \wedge Y$ es un CW-complejo $(n + m + 1)$-conexo.

2. Recordar que la suspensión (reducida) de un espacio punteado (X, x_0) se obtiene del cilindro $X \times I$ identificando las dos tapas y todos los puntos (x_0, t) en un mismo punto. Notar que la suspensión (reducida) ΣX es homeomorfa al producto smash $S^1 \wedge X$. Deducir del ejercicio anterior que si X es un CW-complejo n-conexo entonces ΣX es un CW-complejo $(n + 1)$-conexo.

3. Sea X un CW-complejo n-conexo e Y un CW-complejo m-conexo y supongamos que X o Y es localmente finito. Probar que las inclusiones $i : X \to X \vee Y,\ j : Y \to X \vee Y$ inducen isomorfismos
$$(i_*, j_*) : \pi_r(X, x_0) \oplus \pi_r(Y, y_0) \to \pi_r(X \vee Y, *)$$
para $2 \leq r \leq n + m$. (Sugerencia: $(X \times Y)^{n+m+1}_{(X \vee Y)} = X \vee Y$).

4. Deducir del ejercicio anterior que
$$\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha, *) = \bigoplus_\alpha \pi_n(S^n_\alpha, s_0)$$
para $n \geq 2$ (Sugerencia: para finitos índices α se tiene el ejercicio anterior, para infinitos índices usar que toda función continua $f : S^n \to \bigvee_\alpha S^n_\alpha$ tiene imagen compacta).

5. Sea X un $K(G, n)$ e Y un $K(G, n - 1)$. Probar que existe una equivalencia débil $f : Y \to \Omega X$.

6. Sea X un espacio topológico. Probar que existe un CW-complejo X' y una equivalencia débil $f : X' \to X$. Al par (X', f) se lo llama una CW-aproximación de X.

7. Sean X, Y espacios topológicos y sean (X', f) e (Y', g) CW-aproximaciones de X e Y. Probar que si $h : X \to Y$ es continua, entonces existe un morfismo celular $h' : X' \to Y'$ tal que el siguiente diagrama homotópicamente conmuta:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f"] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, $gh' \simeq hf$.

8. Sea X un CW-complejo que es la unión de una familia
$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \dots$$
de subcomplejos tales que las inclusiones $i_n : X_n \to X_{n+1}$ son nullhomotópicas. Probar que X es contráctil. Deducir que la esfera infinita S^∞ es contráctil y más generalmente, la suspensión infinita $\Sigma^\infty Y$ de cualquier CW-complejo Y es contráctil (la suspensión infinita es la unión topológica de todas las suspensiones iteradas de Y).

9. Probar que todo CW-complejo n-dimensional y n-conexo es contráctil.

10. Sean X e Y CW-complejos homotópicamente equivalentes. Probar que, si X e Y no tienen celdas de dimensión $n+1$, entonces sus n-esqueletos son también homotópicamente equivalentes.

11. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre CW-complejos arco conexos. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, la función f se puede factorizar via $X \to Z_n \to Y$ donde la primera función induce isomorfismos en los π_i para $i \leq n$ y la segunda induce isomorfismos en π_i para $i \geq n+1$.